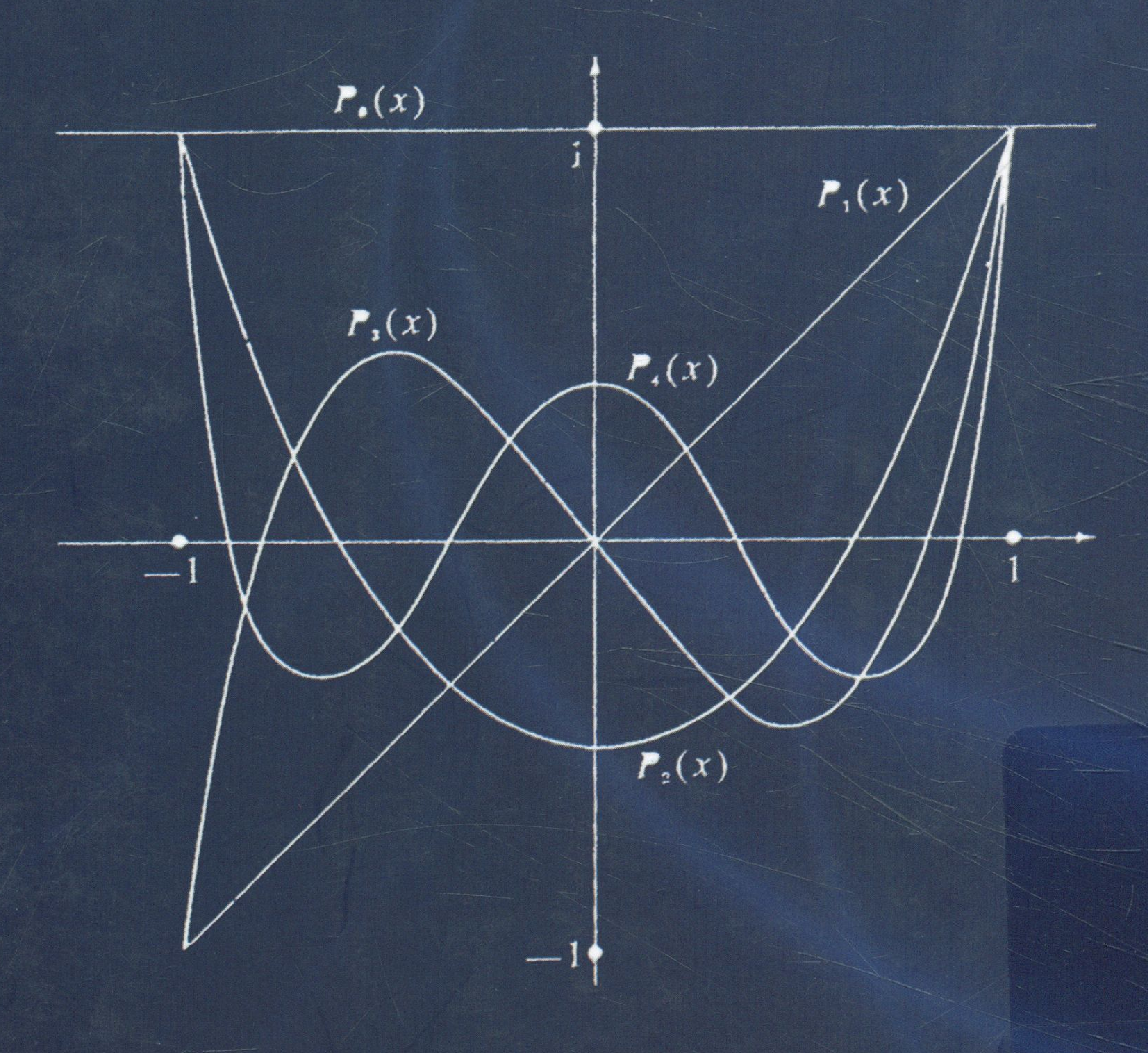
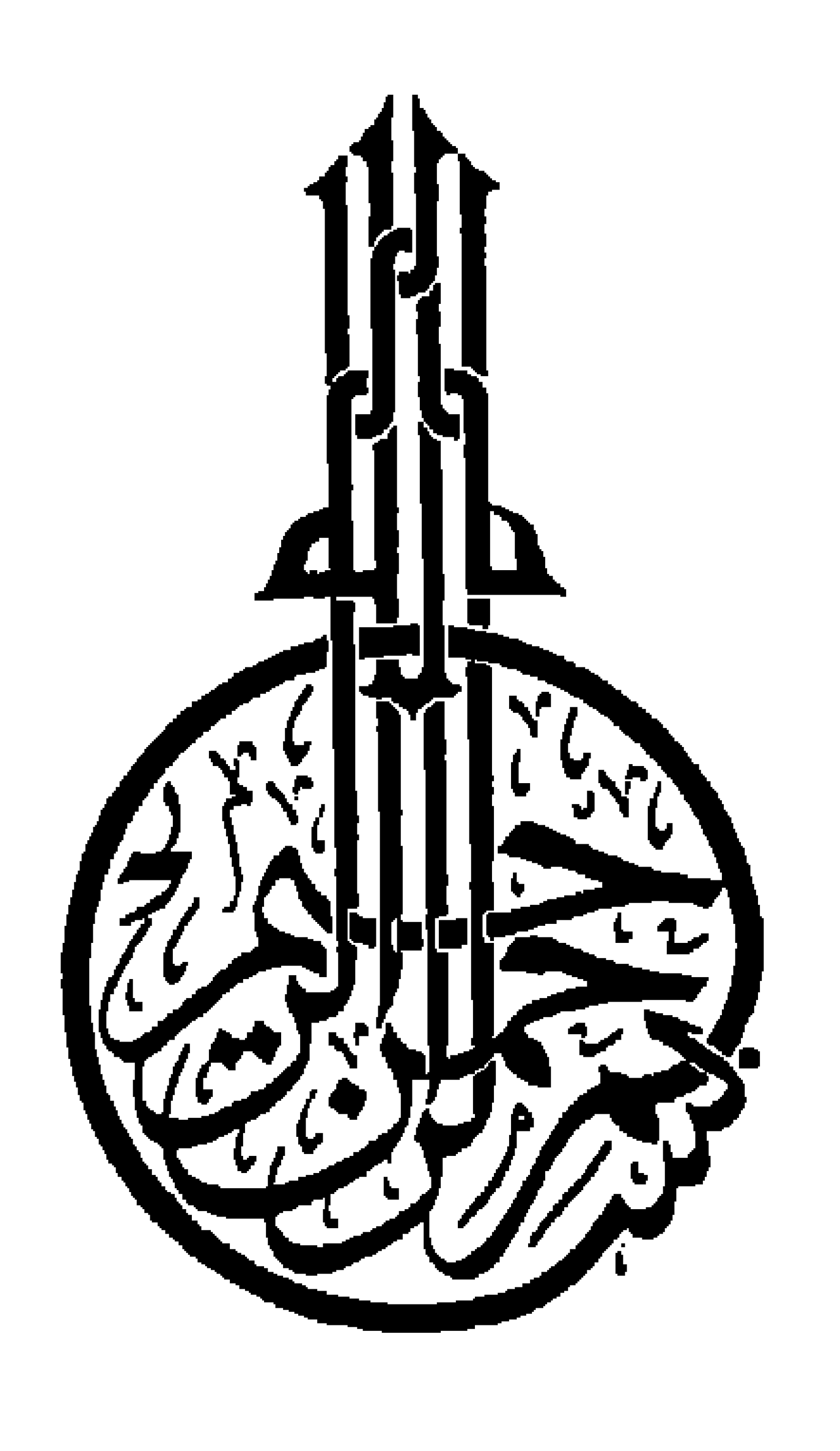
الدوال الخاصة
وبعض تطبيقاتها



تأليف

أ.د فالح بن عمران بن محمد الدوسري   أ.د محمد بن عبداللاه بن أحمد عبده

جامعة القصيم
النشر العلمي والترجمة
Qassim University



إهــداء ٢٠١٥

الملحقية الثقافية السعودية

القاهرة

الـدوال الخـاصـة

وبعض تطبيقاتها

تأليف

أ.د . فالح بن عمران بن محمد الدوسري   أ.د . محمد عبداللاه أحمد عبده

قسم الرياضيات — جامعة أم القرى

كلية العلوم التطبيقية - مكة المكرمة





النشر العلمي والترجمة

بريدة - ص.ب ٢٢٢٢ - ٥١٤٥٢

ح جامعة القصيم ، ١٤٣٢هـ (٢٠١١م)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

الدوسري ، فالح بن عمران محمد
الدوال الخاصة وبعض تطبيقاتها . / فالح بن عمران محمد الدوسري ؛ محمد عبداللاه — مكة المكرمة ، ١٤٢٩هـ
٣٤٠ ص ؛ ١٧×٢٤ سم
ردمك : ٠- ٠٢٥٨- ٠٠- ٦٠٣- ٩٧٨
١- الدوال الحقيقية ٢- الدوال المركبة أ. عبده ، محمد عبداللاه (مؤلف مشارك) ب. العنوان
ديوي ٥١٥ ١٤٢٩/١٨٦٨

رقم الإيداع : ١٤٢٩/١٨٦٨
ردمك : ٠- ٠٢٥٨- ٠٠- ٦٠٣- ٩٧٨

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس على نشره وذلك بقراره رقم (٨-١٣/١٤٣١هـ).

مقدمة المؤلفين

الحمد لله الذي علّم بالقلم، علّم الإنسان ما لم يعلم، والصلاة والسلام على سيد الأولين والآخرين محمد ﷺ وعلى آله وصحبه أجمعين . أما بعد :

فالدوال الخاصة هي نوع من الدوال سميت بهذا الاسم ؛ لأن كلاً منها يختص بتطبيقات فيزيائية أو هندسية معينة ، ومنها دالة جاما (Gamma) التي عرفت من قبل أويلر (Euler، 1707-1783) سنة ١٨٦٨ ، أما الدالة بيتا (Beta) فقد عرفت من قبل الانجليزي واليس (Wallis) سنة ١٦٥٥م وأويلر سنة ١٧٣٠م ، وسماها الفرنسي لجندر (Legendre، ١٧٥٢ - ١٨٣٣) دالة أويلر سنة ١٨٢٦ ، وسميت دالة بيتا من قبل الفرنسي بينت (Bient، ١٧٨٦ - ١٨٥٦) سنة ١٨٣٩ ، وتكمن أهمية الدالتين في تطبيقاتهما الفيزيائية والهندسية واعتماد الكثير من الدوال الخاصة الأخرى عليهما. أما معادلة لجندر التفاضلية فقد ظهرت في أبحاثه المتعلقة بدراسة الجاذبية ونظرية الجهد ولهذه المعادلة والدوال المرتبطة بها تطبيقات أخرى في ميكانيكا الموائع ، ميكانيكا الكم وغيرها من العلوم الفيزيائية والهندسية. أما كثيرات حدود شبيشف فقد ظهرت في

أبحاث الروسي شبيشف (Chebyshev، ١٨٢١- ١٨٩٤) في نظرية الأعداد ونظرية التقريب.

وظهرت معادلة بسل (Bessel) في أبحاث كل من السويسري دانيال برنولي (D. Bernoulli، ١٧٠٠- ١٧٢٨) المتعلقة بدراسة تأرجح سلسلة معلقة، ونظرية أويلر عن اهتزاز الأغشية الدائرية، وأبحاث الألماني بسل (١٧٨٢- ١٨٤٦) المتعلقة بدراسة حركة الكواكب السيارة ، ولمعادلة بسل ومعادلته المعدلة والدوال المرتبطة بها والتي عرّفها بسل سنة ١٨٢٤ تطبيقات كثيرة في نظرية المرونة وحركة السوائل والغازات وانتشار الموجات ونظرية الجهد.

أما معادلة وكثيرات حدود هرميت (Hermite) فقد سميت بهذا الاسم نسبة إلى الفرنسي هرميت (١٨٢٢- ١٩٠١) ، ولها تطبيقات مهمة في نظرية الحركة التوافقية الخطية أو (البسيطة) في ميكانيكا الكم. أما معادلة وكثيرات حدود لاجير فقد سميت بهذا الاسم نسبه إلى الفرنسي لاجير (Laguerre، ١٨٣٤- ١٨٨٦) ، ولهذه المعادلة وكثيرات الحدود المرتبطة بها تطبيقات مهمة في ميكانيكا الكم وخاصة في دراسة ذرة الهيدروجين. أما المعادلات فوق الهندسية فقد درست من قبل أويلر، وسُميت بهذا الاسم من قبل الألماني باف (Pfaff، ١٧٦٥- ١٨٢٥)، أما دراسة الحلول والكثير من الخواص فبرزت في أبحاث الألماني جاوس (Gauss، ١٧٧٧- ١٨٥٥). وتكمن أهمية هذه الدوال في كثرة تطبيقاتها إضافة إلى إمكانية التعبير عن الكثير من الدوال الخاصة بدلالتها.

أما كثيرات حدود جيجنباور (Gegenbauer) فهي صنف من كثيرات الحدود المتعامدة تمثل حلاً لمعادلة جيجنباور التفاضلية سمُيت بهذا الاسم نسبة إلى الرياضي

الألماني لبولد جيجنباور (١٨٤٩- ١٩٠٣) ، ويمكن الحصول عليها من المتسلسلات فوق الهندسية المنتهية ، أما كثيرات حدود جاكوبي فظهرت في أبحاث الألماني جاكوبي (Jacobi، ١٨٠٤- ١٨٥١) سنة ١٨٥٩م كصنف من كثيرات الحدود المتعامدة التي تعمم كثيرات حدود جيجنباور.

أما دوال ماثيو (Mathieu) فجاءت سنة ١٨٦٨م في أبحاث الفرنسي أميل ماثيو(١٨٣٥- ١٨٩٠) المتعلقة بدراسة الأغشية الرقيقة والإهليليجية (الناقصة) الشكل ، كحل لمعادلة ماثيو التفاضلية ، ولهذه الدوال تطبيقات أخرى في ظواهر الرنين المتذبذب القسرية ، والحلول التامة للموجات المستوية في النسبية العامة ، إضافة إلى دراسة التأثيرات القوية الناتجة من دوران جزيء ثنائي الاستقطاب مكهرب.

أما دالة الخطأ وتكاملات فرسنل (Fresenel) والتي عرفت من قبل الفرنسي أو جستين فرسنل (١٧٨٨- ١٨٢٥) فلها تطبيقاتها في الإحصاء والاحتمالات والفيزيائية الرياضية ، أما دالة زيتا (Zeta Function) أو ما يسمى دالة زيتا الريمانية فعرفت من قبل أويلر سنة ١٧٣٧ بالنسبة إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ثم وسع الألماني ريمان (Riemann ، ١٨٢٦- ١٨٦٦م) التعريف سنة ١٨٥٩ ليشمل الأعداد المركبة ، ولهذه الدالة تطبيقاتها المتعددة وخاصة في نظرية الأعداد ، أما التكاملات الناقصية فقد درست من قبل الفرنسي لجندر وصنفت إلى ثلاثة أصناف ، كما درست من قبل النرويجي آبل (Abel ، ١٨٠٢- ١٨٢٩) سنة ١٨٢٦ ، واستخدمت من قبل الفرنسي هرميت سنة ١٨٥٨ في حل معادلة الدرجة الخامسة بمتغير واحد. أما دالة ديراك فقد عُرفت من قبل الإنجليزي ديراك (Dirac) عام ١٩٣٠ ، ولهذه الدالة تطبيقاتها في ميكانيكا الكم ، أما الدوال التوافقية الكروية والتي سُميت بهذا الاسم من قبل لابلاس

فقد ظهرت في أبحاث كل من لجندر ولابلاس (Laplace) سنة ١٧٨٥ وتكلم عنها جاوس سنة ١٨٢٨م.

وحيث إنه لا يوجد مرجع باللغة العربية في هذا المجال فإننا نقدم هذا الكتاب الذي يضم عشرة فصول اشتملت على تلك الدوال وبعض تطبيقاتها سائلين الله تعالى أن يرحمنا ويرحم والدينا، ويجعل أعمالنا خالصة له، وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين.

المؤلفان

ص.ب٥٦١٩٩

المملكة العربية السعودية

المحتويات

الفصل الثالث : كثيرات حدود ودوال لجندر

الفصل الرابع : كثيرات حدود شبيشف

الفصل الخامس : دوال بسل

الفصل السادس: معادلة وكثيرات حدود هرميت

الفصل السابع : كثيرات حدود لاجير

الفصل الثامن : الدوال فوق الهندسية

الفصل التاسع : كثيرات حدود جيجنباور وجاكوبي

الفصل العاشر : كثيرات حدود ودوال خاصة أخرى

الفصل الأول

حل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات

Series Solutions of Differential Equations

وضحنا في دراستنا السابقة أن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية يمكن التعبير عنها بالشكل $y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$.

ودرسنا بعض طرق حلها، لكن في كثير من مسائل الفيزياء الرياضية والهندسية يكون المطلوب دراسة الحل عند نقطة محددة يصعب فيها استخدام الطرق السابقة مثل المؤثرات، طريقة تخفيض الرتبة، طريقة لابلاس وغيرها، ولذلك وجب على الدارس التفكير في طرق أخرى لإيجاد الحل المطلوب، كطريقة متسلسلات القوى، التي ظهرت عام ١٧٣٣م في أعمال جون برنولي (١٧٠٠- ١٧٨٢م)، دون الاهتمام بتقارب تلك المتسلسلات، أما الاستخدام الأمثل والأدق لحل المعادلات التفاضلية باستخدام متسلسلات القوى، فيعود إلى أويلر (١٧٠٧- ١٧٨٣م)، الذي توصل إلى الطريقة التي وضعت بشكلها الحالي من قبل فروبنيس (١٨٤٩- ١٩١٧م) ثم تطورت طرق

الحل باستخدام متسلسلات القوى في القرن التاسع عشر واستخدمت لحل كثير من المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة مثل معادلة بسل (١٧٨٤-١٨٤٦)، $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$ وأيضاً معادلة لجندر (١٧٥٢-١٨٣٣م)، $(1-x^2) y'' - 2x y' + n(n+1) y = 0$ ، هذا وإذا كان $\phi(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x)$ تمثل حلاً للمعادلة $y'' + p(x) y' + Q(x) = 0$ أمكننا التعبير عنه بدلالة متسلسلات القوى، وذلك إيجاد مفكوك تيلور لكل من $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ أما إذا كان الحل غير معلوم، إحدى طرق معرفته أن نفرض أن $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية، ثم نوجد f' ، f'' ، f''' ، ... لمعرفة العلاقات التكرارية، التي نستنتج منها شكل الحل كمتسلسلات قوى، ولتوضيح تلك الطريقة وغيرها من الطرق ضم هذا الفصل خمسة عناوين، تناولنا في الأول منها متسلسلات القوى وتقاربها، وتناولنا في الثاني طريقة حل مسائل الشروط أو القيمة الابتدائية بطريقة متسلسلات القوى، وخصص العنوان الثالث لدراسة طريقة المعاملات غير المعنية، أما العنوان الرابع فلدراسة الحل بالقرب من نقطة تكون المعاملات $p(x)$, $Q(x)$ ليست تحليلية عند تلك النقطة، أما في العنوان الخامس فقد درسنا طريقة فروبنيس لإيجاد الحل بالقرب من نقطة شاذة منتظمة أو غير منتظمة.

(١,١) متسلسلات القوى وتقاربها

إذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة لا نهاية (غير منتهية)، فيقال عن المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ إنها متسلسلة قوى (Power series) في $(x-a)$ ، مركزها a وإذا كان $a = 0$ ، فإن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة قوى في x مركزها عند الصفر.

مثال(١)

(أ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n+1}=1+\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^n}{3}+\cdots$ متسلسلة قوى في $(x-1)$ مركزها عند الواحد.

(ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}=1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\cdots$ متسلسلة قوى في x مركزها عند الصفر.

وفيما يلي تعريف التقارب ونصف قطره:

تعريف(١)

(أ) يقـال عـن متسلسلة القـوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-a)^n$ إنهـا متقاربـة أو تقاربيـة (Convergent)، إذا كانت $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}a_n\,(x-a)^n$ موجودة.

(ب)يقـال عـن متسلسلة القـوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-a)^n$ إنهـا متقاربـة تقاربـاً مطلقـاً (Absolutely Convergent)، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|\left|(x-a)^n\right|$ متقارية.

لاحـظ أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-a)^n$ متقاربـة عنـد $x=a$ ، وقـد تتقـارب لبعض أو كل النقاط x، والقيم التي تتقارب لها المتسلسلة تقع ضمن فترة مركزها a، يطلـق عليهـا فـترة التقـارب، ولكـل متسلسلة يوجـد نـصف قطـر تقـارب r (Radius of convergence))، بحيث إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-a)^n$ متقاربة تقارباً مطلقاً لكـل x بحيـث إن $\left|x-a\right|<r$ ، ومتباعـد (Divergent) لكـل x بحيـث إن $\left|x-a\right|>r$. وإذا كان $r=0$ ، فإن المتسلسلة متقاربـة عنـد $x=a$ ، أمـا إذا كـان $r=\infty$ ، فـإن المتسلسلة متقاربـة لجميـع قـيم x، ولمعرفـة التقـارب كـثيراً مـا يـستخدم اختبار النسبة (Ratio test) واختبار الجذر (Root test).

مثال(٢)

(أ) المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة تقارباً مطلقاً لكل $x \in \mathbb{R}$ ، لأن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

(ب) المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ متقاربة لكل $x \in [-1,1]$ لأن

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|$ ، وعليه فإن نصف قطر التقارب المطلق $r = 1$. لكن مركز المتسلسلة هو الصفر. إذاً المتسلسلة متقاربة لكل $x \in (-1,1)$. وعندما $x = 1$ نجد أن $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة ، وعندما $x = -1$ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ متقاربة أيضاً.

تعريف(٢)

إذا كانت $f(x)$ دالة جميع مشتقاتها $f^{(n)}(a)$ موجودة لكل $n = 1,2,\cdots$ ، فتسمى متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ متسلسلة تيلور للدالة f عند a.

وإذا كانت $a = 0$ ، فتسمى المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ متسلسلة مكلورين.

ويقال عن دالة $f(x)$ إنها تحليلية (Analytic) عند النقطة $x = a$ ، إذا كان لتلك الدالة مفكوك تيلور عند تلك النقطة

مثال(٣)

فيما يأتي متسلسلات مكلورين لبعض الدوال المهمة.

(أ) $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ -\infty < x < \infty$$

(ب) $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)\,!},\ -\infty<x<\infty$$

(ج) $$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\,!},\ -\infty<x<\infty$$

(د) $$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1},\ -1<x\le 1$$

(هـ) $$\sin^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)\,!}{(2^n\ n!)^2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|\le 1$$

(و) $$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|\le 1$$

(ز) $$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad ،|x|<1$$

(١.٢) حل مسائل القيم أو الشروط الابتدائية بواسطة متسلسلات القوى

Power series Solutions of Initial value problems

تعتمد هذه الطريقة على متسلسلات تيلور ، فإذا كانت

$$y''=F(x\,,\ y\,,y') \tag{١.١}$$

تحت الشروط :

$$y(a)=A\ ,\ \ y'(a)=B \tag{١.٢}$$

فإن حلها على الصورة :

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n \tag{١.٣}$$

ولإيجاد ذلك الحل لاحظ أنه من المعادلتين (١.١) ، (١.٢) يمكن إيجاد $y''(a)$ ، وبتفاضل المعادلة (١.١) نحصل على $y^{(3)}(x)$ ، ثم نستخدم الشروط

$y(a),\ y'(a),\ y''(a)$ لحساب $y^{(3)}(a)$ ، وبنفس الطريقة يمكن حساب $y^{(4)}(a),\ y^{(5)}(a),\ \cdots$ ، وبالتعويض في (١,٣) نحصل على الحل المطلوب.

مثال(٤)

حل المعادلات التفاضلية :

$$y''(x) = e^{-x}\, y'(x) + e^{-x}\, y^2(x) - 1 \qquad (١,٤)$$ ، تحت الشروط

$$y(0)=1,\ \ y'(0)=1$$

الحل

بما أن $y''(0) = y'(0) + y^2(0) - 1$ ، إذاً $y''(0) = 1$. لكن بتفاضل (١,٤) نحصل على :

$$y'''(x) = e^{-x}\, y''(x) - e^{-x}\, y'(x) + 2e^{-x}\, y(x)\, y'(x) - e^{-x}\, y^2(x)$$

وباستخدام الشروط الابتدائية نجد أن :

$$y'''(0) = y''(0) - y'(0) + 2\, y(0)\, y'(0) - y^2(0) = 1 - 1 + 2(1)\,(1) - 1 = 1$$

لكن

$$y^{(4)}(x) = e^{-x}\left[y^{(3)}(x) + 2\, y'^2(x) + 2y(x)\, y''(x) - 2y''(x) - 4y(x)\, y'(x) + y^2(x) + y'(x) \right]$$

إذاً $y^{(4)}(0) = 1 + 2 + 2 - 2 - 4 + 1 + 1 = 1$ ، وعليه يمكن كتابة الحل للمعادلة (١,٤) على الصورة :

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots \qquad (١,٥)$$

مثال(٥)

أوجد الحدود الأربعة الأولى من المتسلسلة التي تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y'(x) = x^2 - y^2$ تحت الشرط $y(1) = 1$.

الحل

بالتعويض أولاً نحصل على $y'(1) = 0$ ثم التفاضل والتعويض نحصل على الآتي :

$$y(1) = 1$$
$$y' = x^2 - y^2, \quad y'(1) = 0$$
$$y'' = 2x - 2yy', \quad y''(1) = 2$$
$$y''' = 2 - 2y'^2 - 2yy'', \quad y'''(1) = -2$$
$$y^{(4)}(x) = -6y'y'' - 2yy''', \; y^{(4)}(1) = 4$$

وعليه تكون المتسلسلة الممثلة للحل على الصورة :

$$y(x) = 1 + \frac{2(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^3}{3!} + \frac{4(x-1)^4}{4!} + \cdots$$

والتي يصعب معرفة حدها العام، والدالة الممثلة لذلك الحل.

وبصورة عامة يتضح لنا بعض الصعوبات الناتجة من ارتباط الحل بالشروط الابتدائية فقط، منها:

١- في كثير من الأحيان لا يمكن للقارئ كتابة الحل في صورة عامة.

٢- دراسة التقارب لهذا الحل يتوقف على إيجاد الحد العام للحل لاستخدام اختبار النسبة، وهو ليس متيسراً في كثير من الأحوال. لذلك لا يمكن الجزم بتقارب الحل وعدمه.

٣- عند التعبير عن الحل بعدد محدد من أجزاء المتسلسلة ما هو الخطأ الناتج عن أخذ التقارب.

تمـــارين

أوجد الحدود الأربعة الأولى من المتسلسلات التي تمثل حلاً للمعادلات التفاضلية الآتية:

١- $y' = x^2 y^2 + 1, \; y(1) = 1$

٢- $y'=\sin xy+x^2\ ,\quad y(0)=3$

٣- $y''=x^2-y^2\ ,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

٤- $y'''=xy+yy',\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=2$

٥- $y'=x+e^y\ ,\quad y(0)=a$

٦- $y''+y=0,\ y(0)=A,\ y'(0)=B$

٧- $y'^3+3xy'^2+x-y=0,\ y(0)=1$

(١،٣) طريقة المعاملات غير المعينة

نتناول في هذا البند طريقة إيجاد الحل للمعادلة التفاضلية

$$y''+p(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (١،٦)$$

من خلال العلاقات التكرارية (Recurrence Relations)، تتلافى فيها بعض مشاكل "المسائل" العلمية المشار إليها في البند السابق، وسنركز اهتمامنا على إيجاد الحل حول النقاط العادية (Ordinary points) (يقال عن نقطة x_0 إنها نقطة عادية للمعادلة (١،٦)، إذا كان كل من $P(x),\ Q(x)$ دالة تحليلية عند x_0) وتعتمد الطريقة على القاعدتين الآتيتين:

(أ) إذا كانت متسلسلة القوى $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k$ متقاربة لكل $|x-x_0|<r$، فإن جميع المشتقات $y^{(n)}(x)$, $n=1,2,\cdots$ متقاربة لكل $|x-x_0|<r$.

(ب) إذا كان $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k=0$ $y(x)=$ لكل x، فإن $c_k=0$ لكل $k=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots$.

والآن إذا كـان $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(x-x_0)^k$ حـلاً للمعادلـة (١.٦)، وكـان المطلوب تعيين الثوابت $c_k\;,\;0\le k<\infty$ ، وتحديد الشكل العام للحل $y(x)$ حول النقطة $x=x_0$ والذي يمكن كتابته بالشكل التالي :

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(x-x_0)^k=c_0\,y_0(x)+c_1y_1(x) \qquad (١.٧)$$

حيث $c_0,\ c_1$ ثابتان اختياريان، والدالتان $y_1(x)\ ,\ y_2(x)$ تمثلان حلين مستقلين للمعادلة التفاضلية المعطاة، وكل من الدالتين $y_0(x)\ ,\ y_1(x)$ تحليلية عند $x=x_0$

لاحظ أن :

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(x-x_0)^k\Rightarrow y'(x)$$

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k\,c_k(x-x_0)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\ (k+1)\ c_{k+1}(x-x_0)^k \qquad (١.٨)$$

$$y''(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k\,(k-1)c_k(x-x_0)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\ (k+1)(k+2)\ c_{k+2}(x-x_0)^k$$

وبالتالي فإن التعويض في المعادلة (١.٦)، بعد تمثيل كل من $p(x)\ ,\ Q(x)$ ككثيرة حدود حول $x=x_0$، ثم تجميع قوى $(x-x_0)$ المختلفة ومعادلة المعاملات للصفر وحل المعادلات الناتجة نحصل على العلاقات التكرارية في الثوابت c_k بدلالة $c_0,\ c_1$ ، وعليه تكون $y_0(x)$ تمثل جميع قوى $(x-x_0)$ المضروبة في c_0 بينما $y_1(x)$ تمثل جميع قوى $(x-x_0)$ المضروبة في c_1.

مثال (٦)

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل حلاً للمعادلة

$$y''(x)+x\,y'(x)+y(x)=0 \qquad (١.٩)$$

، حول النقطة $x=0$.

الحل

بما أن كلاً من $p(x)=x$ ، $Q(x)=1$ دالة تحليلية، إذاً $x=0$ نقطة عادية للمعادلة (١،٩)، وعليه يكون الحل على الصورة $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,x^k$ ، وبالتالي فإن:

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k\,c_k\,x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}\,x^k$$

$$y''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k\,(k-1)\,c_k\,x^{k-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\;\;(k+2)c_{k+2}\,x^k$$

وبالتعويض عن $y(x)$ ، $y'(x)$ ، $y''(x)$ في المعادلة (١،٩)، ينتج أن:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\;\;(k+2)c_{k+2}\,x^k+x\;\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}\,x^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,x^k=0 \qquad (١،١٠)$$

وحيث إن الطرف الأيمن في العلاقة (١،١٠) منعدم، إذاً تنعدم معاملات كل قوى x التصاعدية، في الطرف الأيسر منفصلة عن بعضها البعض، وعليه فإن معامل x^k يساوي صفر، إذاً:

$$(k+1)\;(k+2)\;c_{k+2}+k\;c_k+c_k=0 \quad \text{،} \quad \text{أو} \quad (k+2)\;c_{k+2}+c_k=0$$

وعليه نجد أن:

$$c_{k+2}=-\frac{c_k}{k+2}\quad ,\quad k\;\geq\;0 \qquad (١،١١)$$

العلاقة (١،١١) تمثل علاقة تكرارية يمكن تعيين الثوابت منها كالآتي:

$$c_2=-\frac{c_0}{2},\quad c_3=-\frac{c_1}{3},\ c_4=\frac{c_2}{4}=\frac{(-1)^2\,c_0}{2.(4)}$$

$$c_5=\frac{c_3}{5}=\frac{(-1)^2\,c_1}{3.(5)},\cdots$$

وبتكرار العلاقات السابقة للأعداد الزوجية والفردية نحصل على الآتي:

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n c_0}{2.4.6\cdots(2n)}=\frac{(-1)^n c_0}{2^n\ n!} \quad (١.١٢)$$

بينما
$$c_{2n+1}=\frac{(-1)^n c_1}{3.5.7\cdots(2n-1)}=\frac{(-1)^n\, 2.4.6\cdots 2n\ c_1}{2.3.4.5\cdots(2n-1)\,(2n)}$$

وعليه نحصل على الآتي :

$$c_{2n+1}=\frac{(-1)^n\, 2^n\, n!}{(2n)!}c_1 \quad (١.١٣)$$

المعادلتان (١.١٢) و (١.١٣) توضحان أن الثوابت يمكن تمثيلها جميعاً بدلالة c_0 للقيم الزوجية و c_1 للقيم الفردية وعليه يكون الحل على الصورة التالية :

$$y(x)=c_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ x^{2n}}{2^n\ n!}\right]+c_1\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 2^n\, n!}{(2\,n)\ !}\,x^{2n-1}\right]$$
$$=c_0\,y_0(x)+c_1\,y_1(x)$$

والذي يمثل الحل العام للمعادلة (١.١٠). حيث :

$$y_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 2^n\, n!}{(2\,n)\ !}\,x^{2n-1}\quad ,\quad y_0(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^n\ n\ !}$$

كما أن اختبار النسبة يبرهن أن كلاً من المتسلسلتين في y_0 ، y_1 متقارب تقاربا مطلقا.

تمـــــارين

١- أوجد العلاقات التكرارية للمعادلات التفاضلية الآتية حول $x=0$:

(أ) $y''-2y'+xy=0$ ، (ب) $y''+xy=0$

(ج) $y''+(1-x)y'+2xy=0$ ، (د) $y''-x^3y=0$

(هـ) $y''=y'-x^2y=0$ ، (و) $y''+xy'+2xy=0$

(ز) $y''-8x\,xy'=1+2x$

٢- حل المعادلات التفاضلية الآتية عند $x=0$:

(أ) $y''-y'=0$ ، (ب) $(x^2-1)\,y''+xy'-y=0$

(ج) $y''-xy=0$ ، (د) $(x^2+4)\,y''+y'=x$

٣- حل المعادلات التفاضلية الآتية عند $x=1$:

(أ) $y''-xy=0$ ، (ب) $y''-(x-1)\,y'=x^2-2x$

(١.٤) تصنيف المعادلات التفاضلية بالنسبة إلى نقاط الجوار

تناولنا فيما سبق المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات التحليلية عند النقطة x_0 ، وبيّنا كيفية حلها على شكل متسلسلة تايلور حول هذه النقطة. والسؤال الهام ، ماذا عن المعادلات التفاضلية التي معاملات دوالها الاشتقاقية غير تحليلية. ولتوضيح ذلك نورد المثال الآتي :

مثال(٧)

أوجد متسلسلة القوى حول $x=0$ للمعادلة التفاضلية :

$$4x^2\,y''+y=0 \qquad (١.١٤)$$

الحل

لاحظ أن $Q(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ليست تحليلية عند $x=0$. وعليه إذا فرضنا أن $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$ ، فإن $y''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k\,(k-1)\,c_k x^{k-2}$ ،

وعليه فإن $4\sum_{k=2}^{\infty}k\,(k-1)\,c_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k=0$ ،

وبالتالي فإن $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\,4k\,(k-1)+1\,\right]c_k x^k+c_0+c_1 x=0$

وبمقارنة معاملات قوى x في الطرفين نجد أن $c_0=0,\ c_1=0,\ \left[4k(k-1)+1\right]c_k=0$ لكل $k\ge 2$ ، وعليه فإن

$c_0 = 0$ ، $c_1 = 0$ ، $c_k = 0$ لكــل $k \geq 2$. إذاً $c_k = 0$ لكــل $k \geq 0$ ، وبالتــالي لايوجد سوى الحل الصفري $y(0) = 0$.

وتطرأ هنا تساؤلات هي : أين الحل المطلوب؟ ، هل هناك خطأ؟ ، هل الفروض لا تعطي الإجابة المطلوبة؟ والسؤال الأهم هو كيف تعالج هذه المشاكل؟

وقبل الإجابة عنهـا ، وبـالأخص عنـدما تكـون للمعادلـة التفاضـلية المتجانسة أو غير المتجانسة نقطة غير تحليلية عند $x = a$ ، نورد ما يلي :

تعريف(٣)

إذا كانت :

$$y'' + p(x)\,y' + Q(x) = 0 \qquad (١.١٥)$$

فيقال عن :

(أ) x_0 إنهـا نقطـة تحليليـة أو عاديـة (Analytic point) للمعادلـة التفاضـلية المتجانسة (١.١٥)، إذا كان كل من $p(x)$, $Q(x)$ دالة تحليلية.

(ب) x_0 إنهـا نقطـة شـاذة (Singular point) للمعادلـة المتجانسـة (١.١٥) إذا كانت x_0 نقطة ليست تحليلية.

(ج) x_0 إنهـا نقطـة منتظمـة الـشذوذ أو منتظمـة (Regular singular point)، للمعادلـــــة (١.١٥)، إذا كانــــت x_0 غـــــير تحليليـــــة ، وكانـــــت $p(x)\ (x - x_0)$، $Q(x)\ (x - x_0)^2$ دوال تحليلية.

(د) x_0 إنهـا نقطـة غـير منتظمـة (Irregular)، إذا كانـت x_0 ليـست تحليليـة أو منتظمة.

مثال(٨)

ادرس النقاط الشاذة والمنتظمة مع التصنيف لكل حالة في المعادلات التفاضلية الآتية :

(أ) $x^2(x-3)^2 y'' + 4x(x^2-x-6)y' + (x^2-x-2)y = 0$

(ب) $x^{\frac{5}{2}}(x-2)y'' - x^{\frac{5}{2}}y' + (x-2)y = 0$

الحل

نقارن هذه المعادلات بالصورة $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ، فنجد أن :

(أ)

$$P(x) = \frac{4x(x^2-x-6)}{x^2(x-3)^2} = \frac{4(x+2)}{x(x-3)}$$

$$Q(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2(x-3)^2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2(x-3)^2}$$

واضح أنه عند $x = 3, x = 0$ توجد نقاط شاذة للمعادلة التفاضلية ، ولذا سندرس الآتي عند $x = 0$:

$$xP(x) = \frac{4(x+2)}{x-3}, \qquad x^2 Q(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)^2}$$

واضح أن كلاً من $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ دالة تحليلية عند $x = 0$ ولذلك تكون النقطة $x = 0$ نقطة منتظمة.

أما عند $x = 3$ ، فنجد أن :

$$(x-3)P(x) = \frac{4(x+2)}{x}, \quad (x-3)^2 Q(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$$

وكل من $(x-3)P(x), (x-3)^2Q(x)$ دالة تحليلية عند $x = 3$ لذلك تسمى النقطة $x = 3$ نقطة منتظمة.

(ب) $P(x)=-\dfrac{1}{x-2}, \quad Q(x)=\dfrac{(x-2)}{x^{\frac{5}{2}}}$

في البداية نحدد نوع النقاط الشاذة عند $x=0$، $x=2$.

عند $x=0$ نجد أن $xP(x)=\dfrac{-x}{x-2}$ دالة تحليلية بينما $x^2Q(x)=\dfrac{(x-2)}{\sqrt{x}}$ غير تحليلية لذلك يطلق على $x=0$ نقطة غير منتظمة.

أما عند $x=2$ فإن كلاً من :

$$(x-2)P(x)=-1, \quad (x-2)^2Q(x)=\frac{(x-2)^3}{x^{\frac{5}{2}}}$$

دالة تحليلية ، لذلك تسمى $x=2$ نقطة منتظمة.

تمـــارين

ادرس النقاط الشاذة والمنتظمة مع التصنيف لكل حالة في المعادلات التفاضلية الآتية :

١- $x(x+2)^2 y''+5x(x+2x-3)y'+(x-1)y=0\ ,\ (-3\le x\le 1)$

٢- $x^2(x-5)^2+(x-2)y''+x(x+1)y=0,\ (0\le x\le 2)$

٣- $(x-1)^2 y''+x(x-1)y'+x^3y=0\ ,\ |x|\le 1$

٤- $x^{3/2} y''+4(x-1)y'+x^2(x+2)y=0\ ,\ |x|\le 2$

٥- $x^{7/2} y''+(x-2)y'+x^2y=0,\ |x|<1$

(١,٥) طريقة فروبنيص "Method of Forbenius"

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على كيفية حل المعادلة التفاضلية.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xq(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0 \qquad (١.١٦)$$

تبعاً لنوع النقطة المطلوب إيجاد الحل حولها باستخدام الطريقة التي وضع أساسياتها أويلر وأثبتت براهينها الأساسية عام ١٨٧٨م من قبل فروبنيس (١٨٤٨- ١٩١٧) فسُميت باسمه.

ولحل المعادلة (١.١٦) نفرض أن :

$$q(x)=\sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \;,\; q_m \text{ ثوابت} \qquad (١.١٧)$$

$$r(x)=\sum_{m=0}^{\infty} r_m x^m \;,\; r_m \text{ ثوابت} \qquad (١.١٨)$$

دالتان متقاربتان لجميع قيم x القريبة من أو حول $x=0$.

لاحظ أن طريقة فروبينس تعتمد على نقاش الإمكانيات المختلفة لوجود حلين مستقلين للمعادلة (١.١٦) ، ولذلك نفرض أن الحل العام يمكن كتابته على الصورة

$$z(x,s)=x^s[a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx_n+\cdots] \qquad (١.١٩أ)$$

والتي قد تكتب على الشكل الآتي :

$$z(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \;,\; a_0\neq 0 \qquad (١.١٩ب)$$

بتفاضل المعادلة (١.١٩ب) مرتين بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\frac{dz}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2} \qquad (١.٢٠)$$

باستخدام المعادلتين (١.١٩ب) ، (١.٢٠) يمكن كتابة المعادلة (١.١٦) على الصورة :

$$\sum_{n-0}^{\infty} a_n(s+n)(s+n-1)x^{n+s}$$

$$+q(x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)x^{n+s}+r(x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0 \qquad (١،٢١)$$

بالتعويض عن قيمتي $r(x), q(x)$ من المعادلتين (١،١٨) و (١،١٧) في المعادلة (١،٢١) ثم بقسمة الناتج على x^s نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)(s+n-1)x^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_nq_m(n+s)x^{n+m}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_nr_mx^{n+m}=0 \qquad (١،٢٢)$$

ولكي يكون للمتسلسلة (١،٢٢) معنى يجب أن تنعدم معاملات قوى x التصاعدية وعليه يكون معامل x^0 ، (لابد من اختيار $n=0, m=0$) كالآتي :

$$a_0s(s-1)+a_0q_0s+a_0r_0=0$$

والذي يمكن أن تكتب على الشكل :

$$a_0\{s^2+(q_0-1)s+r_0\}=0 \qquad (١،٢٣)$$

أما معامل x^1 : فيكون في الجزء الأول من المعادلة (١،٢٢) عندما نضع $n=1$ وفي الجزأين الثاني والثالث عندما $n+m=1$ (نلحظ أن $n=1, m=0$ والاحتمال الثاني $m=1, n=0$) نجد أن :

$$a_1(1+s)s+\{a_1q_0(1+s)+a_0q_1s\}+\{a_1r_0+a_0r_1\}=0$$

والتي يمكن أن توضح كالآتي :

$$a_1\{s(s+1)+(1+s)q_0+r_0\}+\{q_1s+r_1\}a_0=0 \qquad (١،٢٤)$$

وبالاستمرار في إيجاد قوى x التصاعدية نصل إلى الحد العام لمعامل x^i والذي يمكن الحصول عليه بوضع $n=i$ في الجزء الأول من المعادلة (١،٢٢) ووضع $n+m=i$ في الجزأين الثاني والثالث والذي يحتوي على الأوضاع الآتية

وهكـــذا حتـــى نـــصل إلى $m=2, n=i-2, m=1, n=i-1, m=0, n=i$ وعليه نجد أن : $m=i, n=0$

$$a_i(s+i)(s+i-1)+\{a_i q_0(s+i)+a_{i-1}q_1(s+i-1)+a_{i-2}q_2(s+i-2)$$
$$+\cdots+a_0 q_i s\}+\{a_i r_0+a_{i-1}r_1+\cdots+a_0 r_i\}=0$$

بتجميع معاملات a_i نجد أن :

$$\{(s+i)(s+i-1)+(s+i)q_0+r_0\}a_i+\{a_{i-1}q_1(s+i-1)+\cdots+a_0 q_i s\} \quad (١،٢٥)$$
$$+\{a_{i-1}r_1+a_{i-2}r_2+\cdots+a_0 r_i\}=0$$

المعادلة (١،٢٥) يمكن كتابتها على الصورة :

$$a_i f(s+i)+\{a_{i-1}q_i(s+i-1)+a_{i-2}q_i(s+i-2)+\cdots+a_0 q_i s\}+ \quad (١،٢٦)$$
$$+\{a_{i-1}r_1+a_{i-2}r_2+\cdots+a_0 r_i\}=0$$

حيث

$$f(s+i)=(s+i)(s+i-1)+q_i(s+i)+r_0 \quad (١،٢٧)$$

المعادلـة (١،٢٦) تعطـي علاقـات تكراريـة للمعـاملات $a_0, a_1, \cdots, a_r$ وعليـه يجـب دراسة الحالات المختلفة للثوابت بشرط أن يكون $a_0 \neq 0$.

وللحصول على قيم $a_1, a_2, \cdots, a_n$ بدلالة a_0 نبدأ أولاً بالمعادلة (١،٢٤) والتي يمكن كتابتها على الصورة:

$$a_1=\frac{a_0 h_1(s)}{f(1+s)}, \quad h_1(s)=-(q_1 s+r_1) \quad (١،٢٨)$$

حيث $h_1(s)$ كثيرة حدود من الدرجة الأولى.

وبوضع $i=2$ ، في المعادلة (١،٢٥)، والمعادلة (١،٢٧) نجد أن :

$$a_2 f(s+2)+\{(1+s)a_1 q_1+a_0 q_2 s\}+\{a_1 r_1+a_2 r_2\}=0$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$a_2 f(s+2)+\{(1+s)q_1+r_1\}a_1+\{sq_2+r_2\}a_0=0$$

باستخدام المعادلة (١.٢٨) نحصل على :

$$a_2 f(s+2)=\left\{[(1+s)q_1+r_1]\frac{h_1(s)}{f(1+s)}+sq_2+r_2\right\}a_0$$

ومنها نجد أن :

$$a_2=\frac{h_2(s)a_0}{f(1+s)\cdot f(2+s)}, \qquad (١.٢٩)$$

حيث $h_2(s)=-\{(1+s)h_1(s)+sf(1+s)q_2+r_1h_1(s)+r_2f(1+s)\}$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

وفي الحالة العامة يمكن الحصول على قيمة المعامل a_i كالآتي:

$$a_i=\frac{a_0h_i(s)}{f(1+s)f(2+s)\cdots f(i+s)} \qquad (١.٣٠)$$

حيث $h_i(s)$ كثيرة حدود من الدرجة i.

وعلى ذلك نلحظ أن جميع المعاملات $a_i,\ 1\le i\le n$ معرفة بدلالة a_0 ، ولذلك وضع الشرط أن $a_0\neq 0$.

وعليه فإن المعادلة (١.٢٨) تصبح كالآتي:

$$s^2+(q_0-1)s+r_0=0 \qquad (١.٣١)$$

وتسمى هذه المعادلة المعادلة القياسية أو الدليلية للمعادلة التفاضلية. والمعادلة (١.٣١) معادلة من الدرجة الثانية ولها جذران هما s_1,s_2 ولدراسة الحل باستخدام طريقة فروبينس يتركز الاهتمام عندما يكون الجذران حقيقيين $s_2\ge s_1$.

وعليه يمكن كتابة المعادلة (١.٣١) على الصورة :

$$(s-s_1)(s-s_2)=0 \qquad (١.٣٢)$$

ويلحظ الدارس أنه بوضع $i=0$ في المعادلة (١.٢٧) يحصل على :

$$f(s)=(s-s_1)(s-s_2) \qquad (١,٣٣)$$

وسنقوم الآن بدراسة الحالات المختلفة بين الجذرين s_1, s_2 والتي سوف تمكننا من إيجاد حلين مستقلين للمعادلة التفاضلية.

بوضع $s=s_1$ ، في العلاقة (١,٣٠)، نحصل على a_i بدلالة الثابت الاختياري a_0 وبذلك يعتبر هذا الحل الأول للمعادلة التفاضلية. وعند وضع $s=s_2$ في نفس العلاقة نحصل على الحل الثاني ، وبذلك نحصل على حلين ربما يكونان مرتبطين أو مستقلين، وهذا يتوقف على الآتي :

$$f(i+s_1)\neq 0,\ f(i+s_2)\neq 0 \quad (\text{حيث } i \text{ عدد صحيح}) \qquad (١,٣٤)$$

ولإيجاد علاقة تربط بين $f(i+s_2), f(i+s_1)$ نستخدم المعادلة (١,٣٢) فنجد أن

$$f(s+i)=(s+i-s_1)(s+i-s_2)$$

في المعادلة الأخيرة ضع $s=s_1$ ثم $s=s_2$ نحصل على :

$$\begin{aligned} f(i+s_1)&=i(s_1-s_2+i),\\ f(i+s_2)&=i(s_2-s_1+i) \end{aligned} \qquad (١,٣٥)$$

وعليه يكون الشرط اللازم والضروري لتحقيق العلاقة (١,٣٥) أن s_2-s_1 ليس عدداً صحيحاً موجباً ، وبمفهوم آخر يكون الفرق بين جذري المعادلة s_2-s_1 ليس عدداً صحيحاً.

أما إذا كان الفرق بينهما عدداً صحيحاً بحيث إن $r, s_2-s_1=r$ عدد صحيح موجب فإننا نحصل على :

$$f(s_1+i)=i(i-r), \qquad (١,٣٦)$$

$$f(s_2+i)=i(i+r) \qquad (١,٣٧)$$

وعليه نجد أنه عندما $i=r$ فإن $f(s_1+i)=0$ في حين $f(s_2+i)\neq 0$ لأي عدد صحيح موجب ، وعليه يكون الاختيار عندما $s=s_2$ وليس عند $s=s_1$.

والسؤال الهام هو كيفية إيجاد الحل الثاني ، لذلك نكتب أولاً المعادلة (١.١٩أ) على الصورة :

$$z(x,s)=a_0x^s\{1+\frac{h_1(s)}{f(1+s)}x+\frac{h_2(s)}{f(1+s)f(2+s)}x^2+\cdots+ \qquad (١.٣٨)$$
$$+\frac{h_i(s)}{f(1+s)f(2+s)\cdots f(i+s)}x^i+\cdots\}$$

ومما يعلم باستخدام طريقة إنشاء الثوابت $a_1,a_2,\cdots,a_i$ أنه عند معلومة الطرف الأيمن تتحقق المعادلة الآتية :

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}+xq(x)\frac{dz}{dx}+r(x)z=a_0f(s)x^s \qquad (١.٣٩)$$

وحيث إن المعادلة (١.٢٥) متحققة ، إذاً يجب أن يكون معامل قوى $i\geq 1, x^{s+i}$ معدوما ، ويكون معامل x^s في المعادلة (١.٢٣) والمعادلة (١.٢٧) فقط $a_0.f(s)$. بإعادة كتابة المعادلة (١.٢٩) على الصورة :

$$\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\}z(x,s)=a_0f(s)x^s \qquad (١.٤٠)$$

واضح أن جميع حدود الطرف الأيمن في العلاقة (١.٣٨) ليست معرفة عند $s=s_1$ ولذلك فإنه عند $s=s_1$ نجد أن المقام ينعدم لكل $i\geq r$ ، ومن ثم فإننا نضرب الدالة $z(x,s)$ بالعلاقة $f(s+r)$ ، وعليه فإن الحد الأخير من المقام والذي ينعدم عند $s=s_1$ سوف يحذف ، وبناء على ذلك نجد أن :

$$f(s+r)=(s+r-s_1)(s+r-s_2)$$

بوضع $r=s_2-s_1$ ، نجد أن :

$$f(s+r)=(s+s_2-2s_1)(s-s_1)$$

بضرب المعادلة (١.٤٠) في المقدار $(s-s_1)$ نحصل على :

$$\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\}(s-s_1)z(x,s)=a_0(s-s_1)f(s)x^s$$

ومن المعادلة (١,٣٣) والمعادلة (١,٤٠):

$$\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\}(s-s_1)z(x,s)=a_0(s-s_1)^2(s-s_2)x^s \quad (١,٤١)$$

ضع $s=s_2$ في المعادلة (١,٤١) للحصول على :

$$\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\}(s_2-s_1)z(x,s_2)=0 \quad (١,٤٢)$$

وعليه فإن المعادلة (١,٤٢) توضح لنا أن $z(x,s_2)$ أصبحت حلاً للمعادلة التفاضلية، وبنفس النقاش نتوصل إلى أنه عند وضع $s=s_1$ نجد أن $[(s-s_1)z(x,s)]_{s=s_1}$ يصبح حلاً للمعادلة التفاضلية. وهذا يدل في الواقع على أن المتسلسلة (١,٣٨) لا تعتمد على $z(x,s_2)$ ويكون فقط مضروباً بها وهذا يأتي من كون المعامل $s-s_1$ قد حذف مناطق الخطورة الصفرية في المقام للمقادير التي تتحقق لها العلاقة $i\geq r$ بينما تم صنع مقادير صفرية في البسط لقيم $i<r$ وعليه تكون القوى الأولى في المتسلسلة هي $x^{s_1+r}=x^{s_2}$ والتي تعتبر الجزء الأول من كثيرة الحدود $z(x,s)$.

بتفاضل المعادلة (١,٤١) بالنسبة إلى s نجد أن :

$$\begin{aligned}&\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\}\{\frac{d}{ds}[(s-s_1)z(x,s)]\\&=a_0[(s-s_1)^2\frac{d}{ds}\{(s-s_2)x^s+2(s-s_1)(s-s_2)x^s\}]\end{aligned} \quad (١,٤٣)$$

وعليه نجد أن المعادلة(١,٤٣) توضح لنا أنه عندما $s=s_1$ فإن $\frac{d}{ds}\{(s-s_1)z(x,s)\}$ يعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية ، ويمكن إثبات أن هذا الحل مستقل خطياً عن الحل الأول (يقصد بذلك أنه لا يساوي الحل الأول مضروباً في ثابت). إذاً :

$$[(s-s_1)z(x,s)]_{s=s_1}, \quad (١.٤٤)$$

$$\frac{d}{ds}[(s-s_1)z(x,s)]_{s=s_1} \quad (١.٤٥)$$

يمثلان حلين مستقلين للمعادلة التفاضلية.

وبدراسة أخرى عندما يكون الفرق بين الجذرين s_1, s_2 عددا صحيحا فإن $f(s+i)=0$ لكل $i=r, s=s_1$ وهذا يحدث عندما $h_r(s_1)=0$ وعليه تكون a_r غير معرفة لوجود صفر في البسط والمقام معاً. وفي هذه الحالة يمكن اعتبارها مقدارا ثابتا اختياريا.

وأخيراً عندما يكون الجذران متساويين $s=s_1$ (مكرر) نجد أن $f(s)=(s-s_1)^2$ وتتحول العلاقة (١.٤١) إلى الوضع الآتي:

$$\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\}z(x,s)=a_0(s-s_1)^2x^s \quad (١.٤٦)$$

بوضع $s=s_1$ فإننا نجد أن الطرف الأيمن ينعدم، وعليه يكون $z(x,s_1)$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

بتفاضل المعادلة (١.٤٦) بالنسبة إلى s نجد أن:

$$\begin{aligned}\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+xq(x)\frac{d}{dx}+r(x)\}[\frac{d}{ds}z(x,s)]\\ =a_0[2(s-s_1)x^s+(s-s_1)^2\frac{d}{ds}x^s]\end{aligned} \quad (١.٤٧)$$

بوضع $s=s_1$ نلحظ أيضاً أن $\frac{d}{dz}[z(x,s)]_{s=s_1}$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية وهذا الحل لا يرتبط بالحل الأول، وعليه يمكن القول أنه أصبح لدينا حلين مستقلين هما:

$$z(x,s_1),\ \frac{d}{ds}[z(x,s)]_{s=s_1} \quad (١.٤٨)$$

نستنتج مما تقدم ما يلي:

١- إذا كان جذرا المعادلة الأساسية s_1, s_2 مختلفين والفرق بينهما ليس عدداً صحيحاً فإن $z(x,s_1)$, $z(x,s_2)$ يمثلان حلين مستقلين.

٢- إذا كان الفرق بين الجذرين s_1, s_2 $(s_2 > s_1)$ عدداً صحيحاً بحيث إن أحد معاملات المتسلسلة $z(x,s)$ لانهائي عند $s = s_1$ فإن الحلين المستقلين هما :

$$[(s-s_1)z(x,s)]_{s=s_1} \quad , \frac{d}{ds}\{(s-s_1)z(x,s)\}_{s=s_1}$$

٣- إذا كان الفرق بين الجذرين s_1, s_2 $(s_2 > s_1)$ عدداً صحيحاً ، وأن أحد معاملات $z(x,s)$ وليكن a_r غير معرف عند $s = s_1$ فإنه يمكن الحصول على الحلين المستقلين من $z(x,s)$ بفرض أن a_1 , a_0 ثوابت اختيارية.

٤- إذا كان الجذران متساويين $s = s_1$ فإن الحلين المستقلين هما :

$$z(x,s_1), \quad \frac{d}{ds}[z(x,s)]_{s=s_1}$$

٥- تقارب المسلسلتين $r(x)$ و $q(x)$ مأخوذ في الاعتبار ، أما في الحالات التي يكون فيها $r(x)$ أو $q(x)$ على أحد الأشكال الآتية $\frac{1}{x}, e^{\frac{1}{x}}, \ln x$.

فإننا نستخدم ما يسمى بنقل النقط ، وذلك بوضع $x' = x - a$, $x' = \frac{1}{x}$ وهذا يساعد كثيراً في إيجاد كثيرات حدود للدالتين $q(x), r(x)$.

٦- لإيجاد حل المعادلة

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

بجوار النقطة $x = 0$ يجب معرفة القواعد الآتية :

أ) إذا كان كل من $P(0)$ و $Q(0)$ لها قيم محدودة عند $x = 0$ فإنه يطلق عليها نقطة عادية للمعادلة.

ب) أما إذا كان $xP(x)$ و $x^2Q(x)$ محدودة عند $x=0$ فإنه تسمى نقطة منتظمة.

ج) أما إذا كان $P(x)$ و $Q(x)$ لا يحققان الشرطين السابقين فإنه يقال إنها نقطة شاذة عند $x=0$.

والآن إلى الأمثلة الآتية :

مثال(١) :

حل المعادلة التفاضلية

$$2x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (١.٤٩)$$

بكتابة المعادلة (١.٤٩) على الصورة القياسية نجد أن :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{x}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}xy=0 \qquad (١.٥٠)$$

وعليه نحصل على $q(x)=\frac{1}{2}$, $r(x)=\frac{1}{2}x$ وهما كثيرتا حدود معرفتان لجميع قيم x. وعليه تكون أي كثيرة حدود نحصل عليها متقاربة.

باستخدام الفرض $z=x^s\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ، نحصل على :

$$\frac{dz}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_nx^{s+n-1},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_nx^{s+n-2}.$$

بالتعويض في المعادلة (١.٤٩) نجد أن :

$$2x\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+z=2\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_nx^{s+n-1}+ \\ +\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_nx^{s+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{s+n}=0 \quad (١,٥١)$$

نلحظ أن المتسلسلة يجب أن تنعدم فيها معاملات x التصاعدية كلاً على حدة ، ومن ذلك نجد أنه عند $n=0$ فإننا نحصل على حدين فقط بينما عند $n\geq 1$ فإننا نحصل على ثلاثة حدود ، وعليه نجد أن :

$$2s(s-1)a_0+a_0s=0, \quad (n=0) \quad (١,٥٢)$$

$$2(s+n)(s+n-1)a_n+(s+n)a_n+a_{n-1}=0, \quad (n\geq 1) \quad (١,٥٣)$$

المعادلتان (١,٥٢)، (١,٥٣) يمكن كتابتهما على الشكل التالي :

$$s(2s-1)a_0=0, \quad (١,٥٤)$$

$$\{2(n+s)-1\}(s+n)a_n+a_{n-1}=0 \quad (١,٥٥)$$

المعادلة (١,٥٤) تعطي المعادلة الأساسية وهي :

$$s(2s-1)=0 \text{ و } a_0\neq 0$$

فيكون هناك جذران $s_1=0$ ، $s_2=\frac{1}{2}$ والفرق بينهما ليس عدداً صحيحاً وسوف ينتج عنهما حلان مستقلان ، وعليه تكون المعادلة (١,٥٥) تمثل العلاقات التكرارية المطلوبة ، لذا تكتب على الشكل :

$$a_n=-\frac{a_{n-1}}{(s+n)[2(n+s)-1]},$$

ومنها نجد أن :

$$a_1=\frac{(-1)a_0}{(1+s)(2s+1)},$$

$$a_2=-\frac{a_1}{(s+2)(2s+3)}=\frac{(-1)^2a_0}{(s+1)(s+2)(2s+1)(2s+3)}$$

$$a_3 = \frac{-a_2}{(s+3)(2s+5)} = \frac{(-1)^3 a_0}{(1+s)(2+s)(3+s)(2s+1)(2s+3)(2s+5)} ,$$

ومن خلال ذلك تتضح لنا الصورة العامة للحد العام :

$$a_n = (-1)^n \frac{a_0}{(1+s)(2+s)\cdots(n+s)(2s+1)(2s+3)\cdots(2s+2n-1)}, \forall n \geq 2$$

من خلال ما سبق يمكن كتابة $z(x,s)$ على الصورة الآتية :

$$z(x,s) = a_0 x^s \{1 - \frac{x}{(1+s)(2s+1)} + \frac{x^2}{(1+s)(2+s)(2s+1)(2s+3)} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \frac{x^n}{(1+s)(2+s)\cdots(n+s)(2s+1)\cdots(2s+2n-1)} + \cdots\} \qquad (١,٥٦)$$

بوضع $s = 0$ في العلاقة (١,٥٥) نجد أن :

$$z(x,0) = a_0 \{1 - \frac{x}{1\cdot 1} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 3} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 5} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} + \cdots\}$$

وحيث إن $1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!$ ، وكذلك

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-1)2n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n} = \frac{(2n)!}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdots 2\cdot n}$$
$$= \frac{(2n)!}{2^n \cdot (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

وعليه يكون :

$$z(x,0) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!\{(2n)!/2^n n!\}}$$

ومنها نجد أن :

$$z(x,0) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{(2n)!}. \qquad (١,٥٧)$$

وعندما $s = \frac{1}{2}$ نجد أن :

$$z(x,\frac{1}{2}) = a_0 x^{\frac{1}{2}} \{1 - \frac{x}{\frac{3}{2}\cdot 2} + \frac{x^2}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 2\cdot 4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n+1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + \cdots\}$$

وحيث إن :

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdots\frac{2n+1}{2} = \frac{1}{2^n} 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1) = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdots 2n(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2n+1)!}{2^n[1\cdot 2\cdot 3\cdots n]} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n!}$$

وعليه نحصل على :

$$\begin{aligned} z(x,\frac{1}{2}) &= a_0 x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\{(2n+1)!/(2^{2n} n!)\} 2^n n!} \\ &= a_0 x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{(2n+1)!} \end{aligned} \qquad (١.٥٨)$$

وعليه يكون الحل العام هو : $y = Az(x,0) + Bz(x,\frac{1}{2})$

$$y = A\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{(2n)!} + Bx^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^n}{(2n+1)!} \qquad (١.٥٩)$$

حيث إن A, B ثابتان اختياريان

مثال(٢)

حل المعادلة التفاضلية

$$x(1-x)\frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} - y = 0. \qquad (١.٦٠)$$

بكتابة المعادلة (١.٦٠) على الصورة القياسية :

$$x^2 y'' + xq(x)y' + r(x)y = 0$$

نجد أنها تصبح على الشكل :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1-x} y = 0 \qquad (١.٦١)$$

وعليه نجد أن $q(x)=1$ وهي كثيرة حدود من الدرجة الصفرية المتصلة لجميع قيم x بينما $r=-\dfrac{x}{1-x}$ غير متصلة عند $x=1$ لذلك نبحث تقارب المتسلسلة $r(x)$ عند $|x|<1$ ، والتي يجب دراسة الحل عندها.

والآن نفرض أن الحل على الصورة :

$$z(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}$$

إذاً بالتفاضل ، نجد أن :

$$\frac{dz}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2} \qquad (١،٦٢)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد أن :

$$\begin{aligned}x(1-x)\frac{d^2z}{dx^2}+(1-x)\frac{dz}{dx}-z &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)(s+n-1)x^{s+n-1}\\ &-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)(s+n-1)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)x^{n+s-1}\\ &-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)x^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+n)^2x^{s+n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n\{(s+n)^2+1\}x^{n+s}=0\end{aligned}$$

ولكي تصبح $z(x,s)$ حلاً للمعادلة يجب أن تنعدم معاملات كثيرات حدود لقوى x التصاعدية كلاً على حدة ، لذلك نجد أن المعادلة الأساسية :

$$a_0 s^2=0 \qquad (١،٦٣)$$

كما أن معامل x^{n+s-1} هو :

$$a_n(s+n)^2-\{(s+n-1)^2+1\}a_{n-1}=0 \qquad (١,٦٤)$$

ومن المعادلة (١,٦٣) نجد أن جذري المعادلة هما :

$$s=0,0 \text{ (مكرر)} \qquad (١,٦٥)$$

ومن المعادلة (١,٦٤) نجد أن العلاقة التكرارية هي :

$$a_n=\frac{\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+n)^2}a_{n-1} \qquad (١,٦٦)$$

ومما سبق دراسته اتضح أنه عند وجود جذر مكرر عند $s=s_1$ فإن الحلين المستقلين هما $z(x,s_1)$, $[\frac{d}{ds}z(x,s)]_{s_1}$. وعليه يجب أولاً الحصول على دالة الحل الأول. لذلك نستخدم العلاقة التكرارية (١,٦٦) كالآتي : فنجد أن :

$$a_1=\frac{s^2+1}{(s+1)^2}a_0\ ,\ n=1$$

$$a_2=\frac{\{(s+1)^2+1\}}{(s+2)^2}a_1=\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}}{(s+1)^2\,(s+2)^2}a_0$$

وبصورة عامة نرى أن :

$$a_n=a_0\,\frac{\{s^2+1\}\,\{(s+1)^2+1\}\,\{(s+2)^2+1\}\cdots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\cdots(s+n)^2} \qquad (١,٦٧)$$

وبالعلم بالحد العام يمكن كتابة الدالة $z(x,s)$ على الصورة :

$$z(x,s)=a_0x^s[1+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\,\frac{\{s^2+1\}\,\{(s+1)^2+1\}\,\{(s+2)^2+1\}\cdots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\cdots(s+n)^2}] \qquad (١,٦٨)$$

وعليه يكون الحل الأول بوضع $s=0$ في المعادلة (١,٦٧) كالآتي :

$$z(x,0)=a_0[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot\{1^2+1\}\,\{2^2+1\}\cdots\{(n-1)^2+1\}}{1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdots n^2}x^n]$$

أو

$$z(x,0)=a_0[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot2\cdot5\cdot10\cdot17\cdots\{(n-1)^2+1\}}{(n!)^2}x^n]=a_0y_1(x) \quad (١,٦٩)$$

ولإيجاد الحل الثاني نفاضل المعادلة (١,٦٧) بالنسبة إلى s

$$\frac{d}{ds}z(x,s)=a_0(\frac{d}{ds}x^s)$$

$$[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\{(s+2)^2+1\}\cdots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\cdots(s+n)^2}x^n \quad (١,٧٠)$$

$$+a_0x^s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{ds}[\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\{(s+2)^2+1\}\cdots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\cdots(s+n)^2}]x^n$$

بالنسبة إلى تفاضل الجزء الأول وهو حساب $\frac{d}{ds}x^s$ افرض:

$$u=x^s,\quad \ln u=s\ln x,\quad \frac{1}{u}\frac{du}{ds}=\ln x$$

$$\frac{du}{ds}=u\ln x=x^s\ln x$$

نجد أن:

$$(\frac{d}{ds}x^s)_{s=0}=\left(x^s\ln x\right)_{s=0}=\ln x,\quad x>0$$

أما الجزء الثاني فيتم حسابه كالآتي:

$$G_n(s)=\frac{\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\{(s+2)^2+1\}\cdots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\cdots(s+n)^2}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln G_n(s)=\ln(s^2+1)+\ln[(s+1)^2+1]+\cdots+\ln[(s+n-1)^2+1]$$
$$-2\ln(s+1)-2\ln(s+2)-\cdots-2\ln(s+n)$$

$$\ln G_n(s)=\sum_{m=1}^{n}\ln[(s+m-1)^2+1]-2\sum_{m=1}^{n}\ln(s+m)$$

بإجراء عملية التفاضل :

$$\frac{1}{G_n(s)}\frac{dG_n}{ds}=\sum_{m=0}^{n}\frac{2(s+m-1)}{[(s+m-1)^2+1]}-2\sum_{m=1}^{n}[\frac{1}{s+m}]$$

وعليه يكون :

$$\frac{dG_n(s)}{ds}=2G_n(s)\sum_{m=0}^{n}[\frac{(s+m-1)}{(s+m-1)^2+1}-\frac{1}{s+m}]$$

بالتعويض عن قيمة $G_n(s)$ نحصل على :

$$\frac{dG_n(s)}{ds}=\frac{2\{s^2+1\}\{(s+1)^2+1\}\cdots\{(s+n-1)^2+1\}}{(s+1)^2(s+2)^2\cdots(s+n)^2}\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=0}^{n}[\frac{s+m-1}{(s+m-1)^2+1}-\frac{1}{s+m}]$$

بوضع $s=0$ في المعادلة الأخيرة نجد أن :

$$(\frac{dG_n(s)}{ds})_{s=0}=\frac{2\{1\}\{1^2+1\}\{2^2+1\}\cdots\{(n-1)^2+1\}}{1^2\cdot 2^2\cdots n^2}\cdot\sum_{m=1}^{n}\{\frac{m-1}{(m-1)^2+1}-\frac{1}{m}\}$$

ومنها نجد أن :

$$(\frac{dG_n}{ds})_{s=0}=\frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 5\cdot 10\cdots\{(n-1)^2+1\}}{(n!)^2}\sum_{m=1}^{n}\{\frac{m-2}{m[(m-1)^2+1]}\}$$

بتجميع الجزء الأول والثاني نجد أن :

$$(\frac{dz(x,s)}{ds})_{s=0}=a_0\ln x\cdot[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 10\cdots\{(n-1)^2+1\}}{(n!)^2}x^n]+a_0\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n,$$

حيث c_n تعطى بالعلاقة :

$$c_n=2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 10\cdots[(n-1)^2+1]}{(n!)^2}\sum_{m=1}^{n}\{\frac{m-2}{m[(m-1)^2+1]}\}$$

وفي النهاية يكون الحل الثاني على الشكل :

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)_{s=0} = a_0 y_2(x)$$

حيث

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \qquad (١.٧١)$$

حيث $y_1(x)$ يعطى بالمعادلة (١.٦٩) ويكون الحل العام على الصورة

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \qquad (١.٧٢)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

مثال(٣)

حل المعادلة

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (3-x)y = 0 \qquad (١.٧٣)$$

من الملحوظ أن $q(x) = -3$ ، $r(x) = 3 - x$ والاثنان على شكل متسلسلة قوى لذلك نفرض أن الحل على الصورة :

$$z(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{s+n}$$

بالاشتقاق مرتين بالنسبة إلى x ، نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (s+n) a_n x^{s+n-1}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (s+n)(s+n-1) a_n x^{s+n-2}$$

بالتعويض في المعادلة (١.٧٣) نجد أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{s+n}-3\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_n x^{s+n}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{s+n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{s+n+1}=0$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الشكل الآتي :

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\{(s+n)(s+n-4)+3\}x^{s+n}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{s+n+1}=0$$

بمساواة قوى x التصاعدية بالقيمة الصفرية نحصل على الآتي :

$$\{s(s-4)+3\}a_0=0$$

$$(s-3)(s-1)a_0=0 \qquad (١.٧٤)$$

أيضاً $n\geq 1$

$$a_n(s+n-1)(s+n-3)-a_{n-1}=0$$

أو

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{(s+n-1)(s+n-3)} \qquad (١.٧٥)$$

وتكون المعادلة الأساسية عندما $a_0\neq 0$ كالآتي :

$$(s-1)(s-3)=0$$

والتي يصبح لها جذران $s_1=1$,$s_2=3$ والفرق بينهما عدد صحيح لذلك نتبع الآتي :

أولاً : نحسب معاملات $z(x,s)$ بدلالة a_0 وهذا يتم بمساعدة المعادلة (١.٧٥) مع قيم n المختلفة نحصل على الآتي :

$$a_1=\frac{a_0}{s(s-2)}$$

$$a_2=\frac{a_1}{(s+1)(s-1)}=\frac{a_0}{s(s+1)(s-2)(s-1)}$$

وفي الحالة العامة نحصل على :

$$a_n=\frac{a_0}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)(s-2)(s-1)s(s+1)\cdots(s+n-3)} \qquad (١.٧٦)$$

نلحظ من المعادلة (١،٧٦) أنه عند وضع $s=1$ فإن جميع قيم a_n حيث $n \geq 2$ تصبح لانهائية ، لذلك سنحاول إزالة نقطة الخطورة عند $s=1$ باتباع الآتي :
وهو ضرب دالة الحل $z(x,s)$ في المقدار $(s-1)$ من أجل ذلك نحسب $z(x,s)$ كالآتي :

$$z(x,s) = a_0 x^s \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)(s-2)(s-1)s(s+1)\cdots(s+n-3)}\}$$

ثم نضرب المعادلة السابقة في $(s-1)$ فنجد أن :

$$(s-1)z(x,s) = a_0 x^s \{(s-1) + \frac{(s-1)}{s(s-2)} x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\cdots(s+n-3)}\} \quad (١،٧٧)$$

وعليه تكون المعادلة (١،٧٧) تمثل الحل الأول للمعادلة التفاضلية (١،٧٣) بعد وضع $s=1$

$$[(s-1)z(x,s)]_{s=1} = a_0 x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-2)} = a_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-x^{n+1}}{n!(n-2)!} = a_0\, y(x) \quad (١،٧٨)$$

حيث $y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-x^{n+1}}{n!(n-2)}$

أما الحل الثاني فيمكن الحصول عليه من حساب الجزء $[\frac{d}{ds}(s-1)z(x,s)]_{s=1}$ من أجل تحقيق ذلك نفاضل طرفي المعادلة (١،٧٧) بالنسبة إلى s كحاصل ضرب وجمع دوال :

$$\frac{d}{ds}[(s-1)z(x,s)]_{s=1} = a_0\left(\frac{d}{ds}x^s\right)\{(s-1)+\frac{(s-1)}{s(s-2)}x+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\cdots(s+n-3)}\}$$

$$+a_0x^s\{1+\frac{d}{ds}\frac{(s-1)x}{s(s-2)}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}x^n\frac{d}{ds}[\frac{1}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\cdots(s+n-3)}]\} \tag{١,٧٩}$$

والآن سنحسب أجزاء التفاضل الثلاثة التالية :

$$(1)\quad \frac{d}{ds}x^s = x^s\ln x$$

$$\left(\frac{d}{ds}x^s\right)_{s=1} = x\ln x \tag{١,٨٠}$$

$$(2)\quad \frac{d}{ds}\frac{(s-1)}{s(s-2)} = \frac{s(s-2)-2(s-1)^2}{s^2(s-2)^2}$$

$$\left[\frac{d}{ds}\frac{(s-1)}{s(s-2)}\right]_{s=1} = (-1) \tag{١,٨١}$$

ولنفرض أن :

$$(3)\quad G_n(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)(s-2)s(s+1)\cdots(s+n-3)}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\ln G_n(s) = -\ln s - \ln(s+1) - \ln(s+2)\cdots - \ln(s+n-1) - \cdots - \ln(s+n-3)$$

بإجراء التفاضل :

$$\frac{1}{G_n}\frac{dG_n}{ds} = -\left\{\frac{2}{s}+\frac{2}{s+1}+\frac{2}{s+2}+\cdots+\frac{2}{s+n-3}+\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+n-2}+\frac{1}{s+n-1}\right\}$$

بوضع $s=1$ في الدالة $G_n(s)$

$$[G_n(s)]_{s=1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(-1)1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)}=\frac{-1}{n!(n-2)!}$$

كذلك :

$$\left(\frac{1}{G_n}\frac{dG_n}{ds}\right)_{s=1}=-\left\{2\ (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2})-1+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right\}$$

$$=-\left\{2\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{m}-1+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right\}$$

وعليه نحصل على :

$$\left(\frac{dG_n}{ds}\right)_{s=1}=\frac{1}{n!(n-2)!}\{-1+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{m}\}=c_n \quad (١,٨٢)$$

باستخدام نتائج المعادلتين (١,٨١) (١,٨٢)، في المعادلة (١,٨٠) نجد أن :

$$\frac{d}{ds}\left[(s-1)z(x,s)\right]_{s=1}=a_0\ln x\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-x^{n+1}}{n!(n-2)!}+a_0x\{1-x+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\} \quad (١,٨٣)$$

باستخدام المعادلة (١,٧٨) في المعادلة (١,٨٣) نجد أن :

$$\frac{d}{ds}\left[(s-1)z(x,s)\right]_{s=1} \quad (١,٨٤)$$

$$=a_0[y_1\ln x\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-x^{n+1}}{n!(n-2)!}+x\{1-x+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\}]=a_0y_2(x)$$

وعليه نحصل على الحل العام :

$$y=Ay_1(x)+By_2(x) \quad (١,٨٥)$$

حيث إن كلاً من A,B ثابتان اختياريان.

مثال(٤)

حل المعادلة

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(x^3+2x)\frac{dy}{dx}-2y=0 \qquad (١,٨٦)$$

واضح أن $q(x)=2+x^2$ و $r(x)=-2$ وهما كثيرتا حدود ، لذلك نتبع السابق بفرض الحل على الصورة :

$$z(x,s)=x^s\sum a_nx^n$$

ثم التفاضل مرتين والتعويض لنحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_nx^{n+s}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_nx^{n+s+2}-2\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_nx^{n+s}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

والتي تكتب على الشكل الآتي :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(s+n)(s+n-3)+2\}a_nx^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_nx^{n+s+2}=0 \qquad (١,٨٧)$$

بمطابقة قوى x التصاعدية في المعادلة (١,٨٧) نجد أن :

$$a_0(s-2)(s-1)=0, \qquad (١,٨٨)$$

$$a_1s(s-1)=0 \qquad (١,٨٩)$$

$$\{(s+n)^2-3(s+n)+2\}a_n+(s+n-2)a_{n-2}=0 \qquad n\geq 2 \quad (١,٩٠)$$

وتكون المعادلة الأساسية للجذور هي $(s-2)(s-1)=0$ ، ومنها يتضح أن لدينا جذرين $s_2=2, s_1=1$ والفرق بينهما عدد صحيح كما يلحظ أنه عند $s=1$ فإن المعادلة (١,٨٩) محققة مما يتعذر منه تعيين قيمة a_1 عند $s=1$ ولتعيين الحل $z(x,s)$ نعين أولاً : معاملات قوى x التصاعدية باستخدام العلاقة (١,٨٩) والتي تعطى

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(s+n-1)}, \ n \geq 2 \qquad (١.٩١)$$

وعلى الدارس ملاحظة أن حذف المعامل $(s+n-2)$ قد تم بعد علمه أن $(n \geq 2)$. ويتضح من المعادلة (١.٩١) أنه عند وضع $s=1$ لا تؤثر في المقام لوجود $n \geq 2$ وعليه نجد أنه (بوضع $s=1$)

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n}$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{2}, \qquad a_4 = \frac{-a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4}$$

$$a_3 = \frac{-a_1}{3}, \qquad a_5 = \frac{-a_3}{5} = \frac{a_0}{3 \cdot 5}$$

ونلحظ أننا أمام معاملتين إحداهما زوجية بدلالة a_0 والأخرى فردية بدلالة a_1 والحد العام لكل منهما يمكن إيجاده على الصورة :

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$$

وعليه نحصل على :

$$z(x,1) = x\left[a_0 \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\} + a_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \right]. \qquad (١.٩٢)$$

وعليه نحصل على الحل العام كالآتي :

$$y = Ay_1(x) + By_2(x)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان

$$y_1(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n(n!)}.$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}. \qquad (١,٩٣)$$

مثال(٥)

حل المعادلة

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + xy = 0 \qquad (١,٩٤)$$

بكتابة المعادلة (١,٩٤) على الصورة القياسية :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x(\frac{x^2}{x^2-1})\frac{dy}{dx} + (\frac{x^3}{x^2-1})y = 0$$

نجد أن قيمتي $r(x)$ و $q(x)$ كالآتي :

$$q(x) = \frac{x^2}{x^2-1}, \quad r(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

ويمكن تمثيل الاثنين ككثيرتي حدود تحت الشرط $|x| < 1$ وهذا هو الشرط اللازم والضروري لتقارب أي حل للمعادلة (١,٩٤) وعليه بإيجاد مفكوك تقريبي للمقدار $\frac{1}{x^2-1}$ كالآتي :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{-1}{1-x^2} \cong -[1+x^2]$$

وحيث إن $|x| < 1$ فإن قوى x^4 تهمل ، وتصبح المعادلة (١,٩٤) على الصورة التالية :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^3} - x^3\frac{dy}{dx} - x^3y = 0 \qquad (١,٩٥)$$

لإيجاد حل المعادلة (١,٩٥) نفترض أن الحل على الصورة :

$$z(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}$$

بالتفاضل مرتين والتعويض في المعادلة (١,٩٤) نجد أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)(s+n-1)a_n x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(s+n)a_n x^{n+s+2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s+3}=0$$

بمقارنة معاملات قوى x التصاعدية نجد أن :

$$a_0 s(s-1)=0 \qquad (١,٩٦)$$

$$a_1(s+1)s=0 \qquad (١,٩٧)$$

$$a_0 s(s+2)-a_2(s+2)(s+1)=0 \qquad (١,٩٨)$$

$$a_{n-3}+(s+n-2)a_{n-2}-(s+n)(s+n-1)a_n=0 \qquad (n\geq 3)\ (١,٩٩)$$

وتكون المعادلة الأساسية هي :

$$s(s-1)=0 \qquad (١,١٠٠)$$

والتي تعطي جذرين هما $s_1=0$ و $s_2=1$. ومن المعادلة (١,٩٧) نلحظ أنه عند $s=0$ تكون a_1 غير معلومة بينما في المعادلة (١,٩٨) عند وضع $s=0$ نجد أن $a_2=0$ أما المعادلة (١,٩٩) تعطي صور تكرارية لمعاملات a_n عندما $n\geq 3$ كالآتي :

$$a_n=\frac{a_{n-3}+n(n-2)a_{n-2}}{n(n-1)} \qquad (n\geq 3)\ (١,١٠١)$$

من الملحوظ أنه من الصعب وجود تعبير عام للمعادلة (١,١٠١) وعليه فإنه يمكن تمثيل المعاملات بدلالة a_1, a_0 كالآتي :

$$a_3=\frac{a_0+3a_1}{6}=\frac{1}{6}a_0+\frac{1}{2}a_1. \qquad (١,١٠٢)$$

$$a_4 = \frac{a_1 + 8a_2}{12} = \frac{1}{12} a_1 \qquad (١,١٠٣)$$

$$a_5 = \frac{a_2 + 15a_3}{20} = \frac{3}{4} a_3$$

أو

$$a_5 = \frac{1}{8} a_0 + \frac{3}{8} a_1 \qquad (١,١٠٤)$$

وهكذا نجد أن :

$$y = a_0 + a_1 x + (\frac{1}{8} a_0 + \frac{1}{2} a_1) x^3 + \frac{1}{12} a_1 x^4 + \cdots$$

$$y = a_0 \{1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{8} x^5 + \cdots\} + a_1 \{x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{3}{8} x^5 + \cdots\} \qquad (١,١٠٥)$$

تمـــــارين

حل المعادلات التفاضلية الآتية

١- $x \dfrac{d^2 y}{dx^2} - 2 \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

٢- $4x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$

٣- $x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + (1 + x) \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

٤- $(1 - x^2) \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2x \dfrac{dy}{dx} + y = 0$

٥- $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + (x^2 - 3x) \dfrac{dy}{dx} + (4 - 2x) y = 0$

٦- $(1 - x^2) \dfrac{d^2 y}{dx^2} + x \dfrac{dy}{dx} - y = 0$

٧- $\frac{d^2y}{dx^2} - x^2\frac{dy}{dx} - y = 0$

٨- $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + (x^3 - 5)y = 0$

٩- $9x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

١٠- $4x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

١١- $2x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-6x)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

١٢- $4x\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + y = 0$

١٣- $2(x^2 + x^3)\frac{d^2y}{dx^2} - (x - 3x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$

١٤- $2x^2(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x(3x+1)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

١٥- $2x^3\frac{d^2y}{dx^2} + (2x + x^2)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

الفصل الثاني

دالتا جاما وبيتا

Gamma and Beta functions

عُرِّفت دالة جاما من قبل السويسري أويلر (١٧٥٧- ١٧٨٣) عام ١٧٦٨م وعُرِّفت دالة بيتا من قبل الإنجليزي والس عام ١٦٥٥م وأويلر عام ١٧٣٠م، وسماها الفرنسي لجندر دالة أويلر عام ١٨٢٦م ، وسميت دالة بيتا من قبل الفرنسي بنيت عام ١٨٣٩م. وتكمن أهمية الدالتين، وخاصة دالة جاما في تطبيقاتهما الفيزيائية والهندسية، واعتماد الكثير من الدوال الخاصة الأخرى عليهما، مثل: دوال بسل، دالة الخطأ والتكامل الأسي والتكامل الجيبي وتكامل جيب التمام وغيرها مما سنوضحه فيما بعد. ويضم هذا الفصل بندين عرفنا فيهما دالتي بيتا وجاما، ودرسنا خواصهما الأساسية وبعض تطبيقاتهما.

(٢.١) دالة جاما وخواصها الأساسية

تعرف دالة جاما كالآتي:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-t}\,t^{n-1}dt \qquad (n>0) \tag{٢.١}$$

لاحظ أن التكامل في (٢،١) متقارب لكل $n>0$ ؛ لأن :

$$\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt=\int_0^1 t^{n-1}e^{-1}dt+\int_1^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt$$

لكن $0<t^{n-1}e^{-t}<\frac{1}{t^r}$ لكل $r=1-n<1$ وعليه فإن :

$$\left|\int_0^1 t^{n-1}e^{-t}\,dt\right|<\left|\int_0^1\frac{dt}{t^r}\right|=\frac{1}{1-r}\,,\ r<1$$

وبالتالي فإن $\int_0^1 t^{n-1}e^{-t}dt$ متقارب لكل $n>0$. أما بالنسبة إلى $\int_1^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$ فنفرض أن $f(m)=m^{n-1}e^{-m}$. إذاً $f(m+1)=(m+1)^{n-1}e^{-(m+1)}$ وعليه فإن

$$\left|\frac{f(m+1)}{f(m)}\right|=\left|\left(\frac{m+1}{m}\right)^{n-1}\ \frac{1}{e}\right|=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{n-1}\frac{1}{e}$$

وبالتالي فإن $\operatorname{Lim}_{m\to\infty}\left|\frac{f(m+1)}{f(m)}\right|=\frac{1}{e}<1$ ومنها نجد أن $\int_1^\infty t^{n-1}\,e^{-t}\,dt$ متقارب لكل $n>0$. إذاً $\int_0^\infty t^{n-1}\,e^{-e}\,dt$ متقارب لكل $n>0$.

وفي ما يلي بعض المبرهنات التي توضح الخواص الأساسية لدالة جاما.

مبرهنة(١)

إذا كان $n=1$ ، فإن

$$\Gamma(1)=1 \qquad (٢،٢)$$

البرهان

من تعريف $\Gamma(n)$ نضع $n=1$ فنحصل على :

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=\mathop{Lim}_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}dt=\mathop{Lim}_{a\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^a\ =1$$

مبرهنة(٢)

إذا كان $n > 0$ ، فإن :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad (٢,٣)$$

البرهان

ضع $(n+1)$ بدلاً من n في المعادلة (٢,١) نجد أن :

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^n\, dt$$

وبالتكامل بالتجزيء بأخذ $u = t^n$ ، $e^{-t}dt = dv$ نحصل على :

$$\Gamma(n+1) = \lim_{b\to\infty} \{[-e^{-t}\, t^n]_0^b + n\int_0^b e^{-t}\, t^{n-1}\, dt\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}[-e^{-b}\, b^n] + n\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n-1}\, dt = 0 + n\Gamma(n) = n\Gamma(n) \quad (2.4)$$

مبرهنة(٣)

لأي عدد صحيح موجب

$$\Gamma(n+1) = n!$$

البرهان

بتطبيق مبرهنة(٢) وتكرار التعويض عن n بالمقادير $n-1$, $n-2$, $n-3$
وهكذا نجد أن :

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\Gamma(n-1)$$
$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1\Gamma(1)$$

وعليه فإن :

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (٢,٥)$$

مبرهنة(٤)

$$\Gamma(n)=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n-1}dt$$

البرهان

بوضع $t=u^2$ ، $dt=2u\,du$ في (٢،١) نجد أن:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-u^2}(u^2)^{n-1}(2udu)=2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2n-1}du \qquad (٢،٦)$$

لاحظ أن مبرهنة(٤) مفيدة في العمليات الإحصائية المستخدم فيها ما يسمى بدالة الكثافة وغيرها. فمثلاً عند وضع $n=\frac{1}{2}$ نجد أن:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi} \qquad (٢،٧)$$

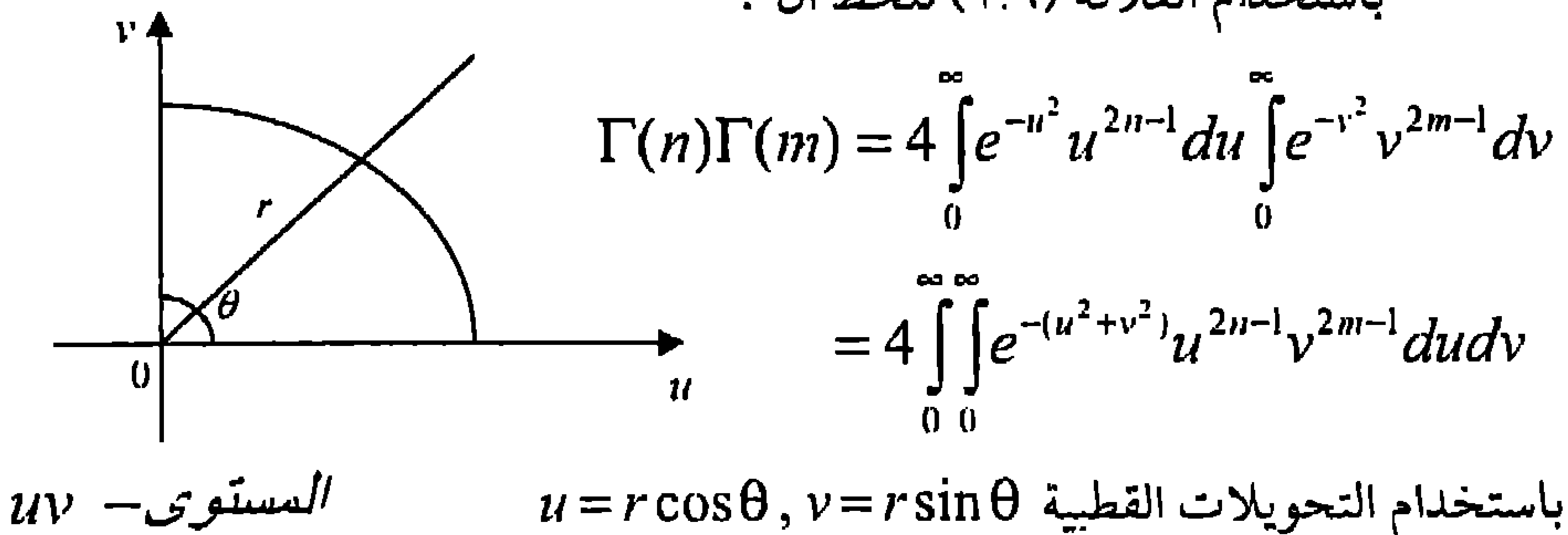
ومن أهم تطبيقات العلاقة (٢،٦) المبرهنة الآتية والتي تربط الدوال المثلثية ودالة جاما.

مبرهنة(٥)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}\theta\cdot\sin^{2m-1}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)}.$$

البرهان

باستخدام العلاقة (٢،٦) نلحظ أن:



$$\Gamma(n)\Gamma(m)=4\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2n-1}du\int_0^\infty e^{-v^2}v^{2m-1}dv$$

$$=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2n-1}v^{2m-1}dudv$$

المستوى– uv

باستخدام التحويلات القطبية $u=r\cos\theta\,,\ v=r\sin\theta$

مع تطبيق نظرية الجاكوبيان $dudv = rdrd\theta$ نجد أن :

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2n-1}(r\sin\theta)^{2m-1} rdrd\theta$$

$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r^{2n+2m-1}\cos^{2n-1}\theta\sin^{2m-1}\theta\, drd\theta$$

ولكن من مبرهنة(٤) نجد أن : $\Gamma(n+m) = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(n+m)-1} dr$

وعليه فإن :

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 2\Gamma(n+m)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta\sin^{2m-1}\theta\, d\theta$$

وبالتالي فإن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta\sin^{2m-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)} \qquad (٢.٨)$$

من إحدى تطبيقات مبرهنة(٥) ما يأتي :

عندما $n = m = \frac{1}{2}$ نحصل على :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(1)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2}$$

بإجراء التكامل نجد أن $\pi = \left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2$ ، ولكن $\Gamma(n) > 0$ لكل $n > 0$. إذاً

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad (٢.٩)$$

ومن العلاقة (٢.٩) والعلاقة (٢.٧) نجد أن لدالة الكثافة القيمة :

$$\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (٢.١٠)$$

مثال(١)

احسب

(أ) $\dfrac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$ ، (ب) $\dfrac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ ، (ج) $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)}$ ، (د) $\dfrac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})}$

الحل

(أ)
$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5!}{2\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2\cdot 2!} = 30$$

(ب)
$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

إذاً
$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{3}{4}$$

(ج)
$$\frac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)} = \frac{2!(1.5)(0.5)\Gamma(0.5)}{(4.5)(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5)}$$
$$= \frac{2!}{(\frac{9}{2})(\frac{7}{2})(\frac{5}{2})} = \frac{16}{315}.$$

(د)
$$\frac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{6\cdot(\frac{5}{3})(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{4}{3}.$$

مثال(٢) احسب التكاملات الآتية :

(أ) $\int_0^\infty x^3 e^{-x}dx$ ، (ب) $\int_0^\infty x^6 e^{-2x}dx$ ، (ج) $\int_0^\infty \sqrt{y}e^{-y^3}dy$

(د) $\int_0^\infty 3^{-4x^2}dx$ ، (هـ) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

الحل

(أ)
$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{4-1}e^{-x}dx = \Gamma(4) = 3!$$

(ب) نأخذ الفرض $u = 2x$ ، إذاً

$$I = \int_0^\infty x^6 e^{-2x}dx,$$

$$I = \int_0^\infty (\frac{u}{2})^6 e^{-u}\frac{du}{2} = \frac{1}{(2)^7}\int_0^\infty u^6 e^{-u}du = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$$

(ج) بوضع $I = \int_0^\infty \sqrt{y}e^{-y^3}dy$ ، $y^3 = u$ ، $3y^2dy = du$

ونلحظ أن حدود التكامل تبقى كما هي :

$$I = \int_0^\infty \sqrt{u^{\frac{1}{3}}}e^{-u}\cdot\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}du$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \frac{1}{3}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

(د) بما أن $3^{-4x^2} = (e^{\ln 3})^{-4x^2}$ ، لأن $3 = e^{\ln 3}$ ، $I = \int_0^\infty 3^{-4x^2}dx$. إذاً

$3^{-4x^2} = e^{-4x^2\ln 3}$ وبوضع $(4\ln 3)x^2 = u$ نجد أن :

$$x = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\ln 3}} \qquad dx = \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{\ln 3}}du$$

وعليه فإن :
$$I = \int_0^\infty e^{-u}\cdot(\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{\ln 3}})\,du = \frac{1}{4\sqrt{\ln 3}}\int_0^\infty e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 3}}$$

(هـ) بوضع $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ ، $-\ln x = u$ ، $x = e^{-u}$ ، $dx = -e^{-u}du$

لكن $\lim_{x\to 0} u=\infty$ ، $\lim_{x\to 1} u=0$.

إذاً

$$I=-\int_{\infty}^{0}\frac{e^{-u}du}{u^{\frac{1}{2}}}=\int_{0}^{\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du=\sqrt{\pi}$$

مثال(٣) احسب التكامل الآتي :

$$I=\int_{0}^{\infty}x^{m}e^{-ax^{n}}dx,\ a>0$$

الحل

بوضع $ax^{n}=u$ وعليه فإن : $x=\frac{u^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$ و $dx=\frac{\frac{1}{n}}{a^{\frac{1}{n}}}u^{\frac{1}{n}-1}du$

وبالتالي فإن :

$$I=\int_{0}^{\infty}e^{-u}\cdot\left(\frac{u^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}\right)^{m}\cdot\frac{u^{\frac{1}{n}-1}}{na^{\frac{1}{n}}}du$$

$$=\frac{1}{na^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}}}\int_{0}^{\infty}e^{-u}u^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1}du\ =\frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

مثال(٤)

احسب التكامل الآتي :

$$I=\int_{0}^{1}x^{m}(\ln x)^{n}dx$$

الحل

لتكن $\ln x=-u$. إذاً عندما $x=0$ فإن $u=\infty$ وعندما $x=1$ فإن $u=0$

وعليه $x=e^{-u}$ و

$$I=-\int_{\infty}^{0}(e^{-u})^m(-u)^n(e^{-u}du) \quad =(-1)^n\int_{0}^{\infty}e^{-(m+1)u}u^n du$$

بوضع $(m+1)u=v$ نجد أن :

$$I=(-1)^n\int_{0}^{\infty}e^{-v}(\frac{v}{1+m})^n\cdot\frac{dv}{1+m}$$

$$=\frac{(-1)^n}{(1+m)^{n+1}}\int_{0}^{\infty}e^{-v}v^n dv=\frac{(-1)^n}{(1+m)^{n+1}}\Gamma(n+1)=\frac{(-1)^n}{(1+m)^{n+1}}\cdot n!$$

- **توسعة تعريف دالة جاما**

أثبتنا في مبرهنة(٢) أن $\Gamma(n)=\frac{1}{n}\Gamma(n+1)$

إذاً عندما $n\to 0$ ، نجد أن $\Gamma(n)\to\infty$ ، وعليه إذا كان n عدداً صحيحاً سالباً فإن $\Gamma(n)\to-\infty$.

أما إذا كان $-1<n<0$ ، فإن $0<(n+1)<1$ و $\frac{\Gamma(n+1)}{n}$ معرفة لكل $0<(n+1)<1$ وبالتالي فإن $\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n}$ معرفة أيضاً لكل $-1<n<0$.

وعندما $-2<n<-1$ ، نجد أن $-1<n+1<0$ و $\frac{\Gamma(n+1)}{n}$ معرفة في تلك الفترة ، إذاً $\Gamma(n)$ معرفة لكل $-2<n<-1$. وبصورة عامة إذا كان r عدداً صحيحاً موجباً ، فإن $\Gamma(n)$ معرفة لكل $-r<n<-r+1$.

مثال(٥) أوجد قيمة

(أ) $\Gamma(-\frac{1}{2})$ ، (ب) $\Gamma(-\frac{5}{2})$ ، (ج) $\Gamma(\frac{3}{2})$ ، (د) $\Gamma(\frac{5}{2})$

الحل

بما أن : $\Gamma(n)=\dfrac{\Gamma(n+1)}{n}$

(أ) بوضع $n=\dfrac{-1}{2}$ ، نجد أن :

$$\Gamma(\frac{-1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{-1}{2}+1)}{\frac{-1}{2}}=-2\Gamma(\frac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}$$

(ب) بوضع $n=\dfrac{-5}{2}$ ، نجد أن :

$\Gamma(\frac{-5}{2})=\dfrac{\Gamma(\frac{-3}{2})}{(\frac{-5}{2})}$ لكن $\Gamma(\frac{-1}{2})=-2\sqrt{\pi}$ ، إذاً $\Gamma(\frac{-3}{2})=\dfrac{\Gamma(\frac{-1}{2})}{(\frac{-3}{2})}$

وعليه نجد أن :

$$\Gamma(\frac{-5}{2})=(\frac{-2}{5})(\frac{-2}{3})(-2\sqrt{\pi})=\frac{-8}{15}\sqrt{\pi}.$$

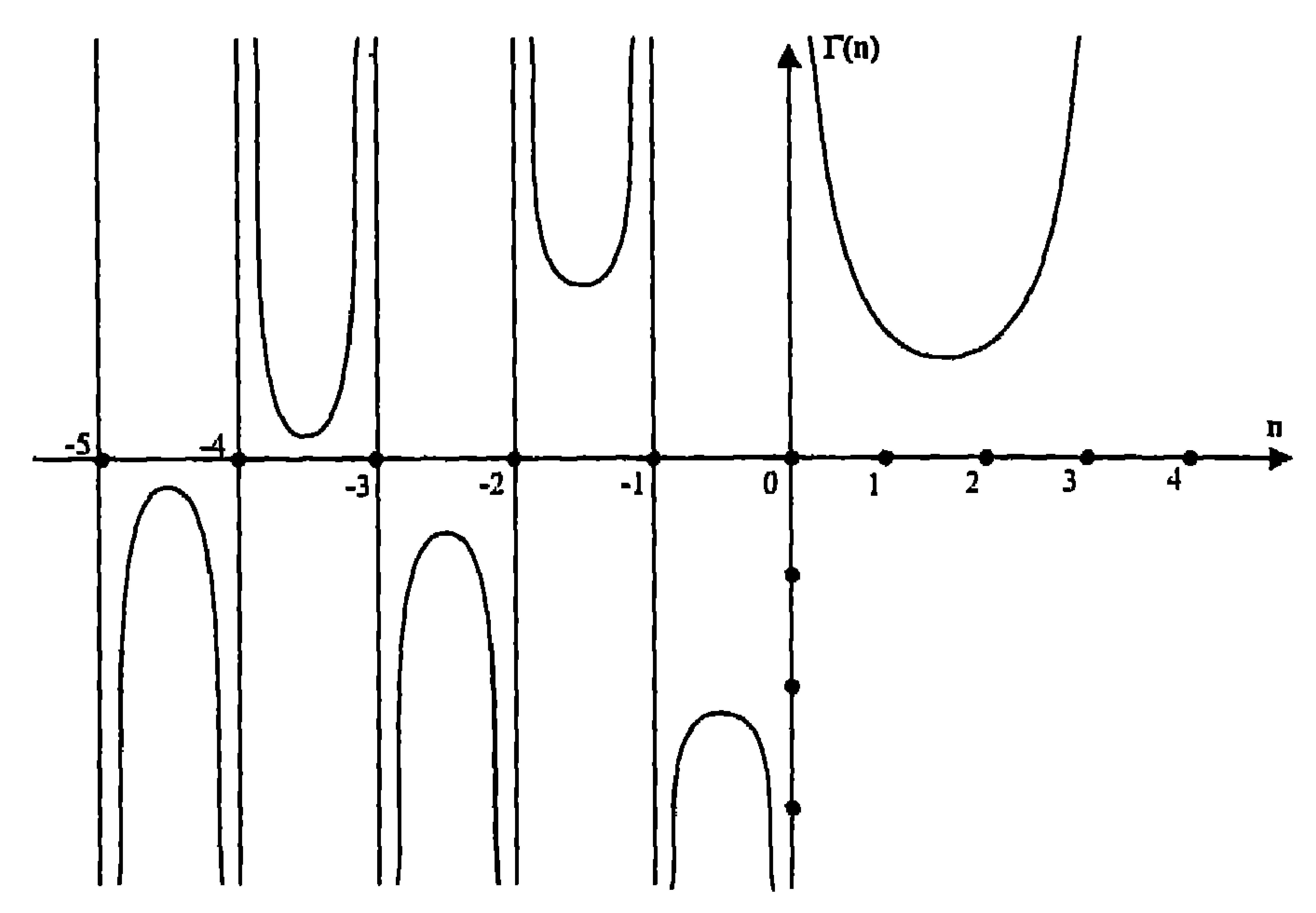
(ج) بوضع $n=\dfrac{1}{2}$ في العلاقة $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ ، نجد أن :

$$\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(د) بوضع $n=\dfrac{3}{2}$ ، نجد أن :

$$\Gamma(\frac{5}{2})=\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

وبإعطاء قيم أخرى إلى n يمكننا أن نرسم منحنى الدالة جاما وهو



مثال(٦)

أثبت أنه لقيمة n العظمى $n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

الحل

بما أن : $$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

و $x^n = e^{\ln x^n}$ لكل $x > 0$.

فإن : $$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{n\ln x} \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{n\ln x - x} dx$$

نلحظ أن المقدار $n\ln x - x$ تصبح له قيمة عظمى عند $x = n$ ، وعليه نستخدم التعويض $x = n + y$ فنجد أن :

$$\Gamma(n+1)=e^{-n}\int_{-n}^{\infty}e^{n\ln(n+y)-y}dy=e^{-n}\int_{-n}^{\infty}e^{n\ln n+n\ln(1+\frac{y}{n})-y}dy$$

$$=n^{n}e^{-n}\int_{-n}^{\infty}e^{n\ln(1+\frac{y}{n})-y}dy$$

باستخدام القاعدة :

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\cdots$$

مع وضع $z=\frac{y}{n}$:

$$\Gamma(n+1)=n^{n}e^{-n}\int_{-n}^{\infty}e^{\frac{-y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}+\cdots}dy$$

بفرض أن $y=\sqrt{n}\,v$ نجد أن :

$$\Gamma(n+1)=n^{n}e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty}e^{\frac{-v^2}{2}+\frac{v^3}{3\sqrt{n}}+\cdots}dv$$

وعندما $n\to\infty$:

$$\Gamma(n+1)\approx n^{n}e^{-n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-v^2}{2}}dv=\sqrt{2\pi n}\,n^{n}e^{-n}$$

(٢,٢) دالة بيتا

يضم هذا الجزء تعريف دالة بيتا ودراسة خواصها الأساسية وبعض تطبيقاتها وتعرف دالة بيتا كالآتي :

$$\beta(n,m)=\int_{0}^{1}t^{n-1}(1-t)^{m-1}dt\qquad (n>0,m>0)\quad (٢,١١)$$

وواضح عند $t \to 0$ لابد من وجود قيود على n، وعندما $t \to 1$ لابد من وجود قيود على m.

والآن إلى المبرهنة الآتية والتي توجد العلاقة بين دالتي بيتا وجاما.

مبرهنة(٦)

$$\beta(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \qquad (٢،١٢)$$

البرهان

من التعريف

$$\beta(n,m) = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1}\,dt$$

بفرض أن $t = \cos^2\theta$ وعليه عندما تكون $t = 0$ نجد أن $\theta = \frac{\pi}{2}$ وعند $t = 1$ نجد أن $\theta = 0$ لكن $dt = -2\sin\theta\cos\theta d\theta$ ومن ذلك نجد أن

$$\beta(n,m) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta \sin^{2m-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

باستخدام مبرهنة(٥)

ملاحظة

$$\text{(a)}\quad \beta(n,m) = \beta(m,n) \qquad (٢،١٣)$$

علاقتان هامتان

$$\text{(b)}\quad \beta(n+1,m) = \frac{n}{n+m}\beta(n,m) \qquad (٢،١٤)$$

$$\text{(c)}\quad \beta(n,m+1) = \frac{m}{n+m}\beta(n,m) \qquad (٢،١٥)$$

لإثبات صحة العلاقة (b) استخدم مبرهنة(٦)، تجد أن :

$$\beta(n+1,m)=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}{\Gamma(n+1+m)}$$

باستخدام العلاقة (٢،٣) نجد أن :

$$\beta(n+1,m)=\frac{n\Gamma(n)\Gamma(m)}{(n+m)\Gamma(n+m)}$$

وباستخدام العلاقة (٢،١٢)، نجد أن :

$$\beta(n+1,m)=\frac{n}{n+m}\beta(n,m)\cdot$$

مثال(٧)

احسب التكاملات الآتية :

(أ) $\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx$ ، (ب) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$ ، (ج) $\int_0^a y^4\sqrt{a^2-y^2}\,dy$

الحل

نلحظ أن هذه التكاملات يمكن حلها بدالة بيتا كالآتي :

(أ)

$$I=\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx=\int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1}\,dx=\beta(5,4)$$

$$=\frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(9)}=\frac{4!\ 3!}{8!}=\frac{1}{280}$$

(ب)

$$I=\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$$

بوضع $dx=2dv$ ، $x=2v$ ، فنجد أن $v=0$ عند $x=0$ ، $v=1$ عند $x=2$ ، وعليه فإن :

$$I=\int_0^1 \frac{4v^2\cdot 2dv}{\sqrt{2-2v}}=\frac{8}{\sqrt{2}}\int_0^1 (1-v)^{-\frac{1}{2}}v^2dv$$

$$=4\sqrt{2}\beta(3,\frac{1}{2})=4\sqrt{2}\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3+\frac{1}{2})}=\frac{4\sqrt{2}\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})}=\frac{4\sqrt{2}\cdot 2!\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\pi}}=\frac{64\sqrt{2}}{15}$$

(ج)

$$I=\int_0^a y^4(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}dy$$

بوضع $y^2=a^2x$ ، نجد أن $y=ax^{\frac{1}{2}}$ ، وعليه فإن:

$$I=\int_0^1 (ax^{\frac{1}{2}})^4 a(1-x)^{\frac{1}{2}}a\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{a^6}{2}\beta(\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2})$$

$$=\frac{a^6}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)}=\frac{a^6}{2}\cdot\frac{(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\pi}{3!}=\frac{\pi a^6}{32}.$$

مثال(٨)

احسب التكاملات الآتية

(أ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta$ ، (ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta d\theta$ ، (ج) $\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta$

الحل

لحساب هذه التكاملات من المفيد استخدام الآتي:

$$\beta(n,m)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta$$

(أ)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta$$

بما أن $2m-1=0$ ، $2n-1=6$ ، $m=\frac{1}{2}$ ، $n=\frac{7}{2}$ ، وعليه فإن :

$$I=\frac{1}{2}\beta(\tfrac{7}{2},\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)}=\frac{5\pi}{32}$$

(ب) نفرض أن $\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta d\theta$. إذاً بوضع $2n-1=4$ و $2m-1=5$

نجد أن $n=\frac{5}{2}$ و $m=3$ ، وعليه فإن :

$$I=2\beta(\tfrac{5}{2},3)=2\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{11}{2})}=\frac{8}{315}$$

(ج) نفرض أن $\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta$. إذاً بوضع $2n-1=0$ ، $2m-1=4$ ، نجد أن :

$n=\frac{1}{2}$ ، $m=\frac{5}{2}$ ، وعليه فإن :

$$I=\int_0^{\pi}\cos^4\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{2\Gamma(3)}=\frac{8\pi}{3}$$

مثال(٩)

اثبت علاقة لجندر الآتية :

$$\Gamma(2n)=\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n)\Gamma(n+\tfrac{1}{2})$$

الحل

ضع $n=m$ في العلاقة (٢,١١)، نجد أن :

$$\beta(n,n)=\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}dt$$

وباستخدام التعويض $s=2t-1$ ، نجد أن $dt=\frac{ds}{2}$ كما أن فترة التكامل تتحول من [0,1] إلى [−1,1] ، وعليه نجد أن :

$$\beta(n,n)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^{n-1}}(1+s)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}(1-s)^{n-1}\frac{ds}{2}$$

$$=\frac{1}{2^{2n-1}}\int_{-1}^{1}(1+s)^{n-1}(1-s)^{n-1}ds=\frac{2}{2^{2n-1}}\int_{0}^{1}(1-s^2)^{n-1}ds$$

والآن افرض أن $s^2=u$ نجد أن :

$$\beta(n,n)=2^{-2n+1}\int_{0}^{1}(1-u)^{n-1}u^{\frac{-1}{2}}du=2^{-2n+1}\beta(\tfrac{1}{2},n)=2^{-2n+1}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$$

إذاً

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}=2^{-2n+1}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}$$

$$\Gamma(2n)=\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n)\Gamma(n+\tfrac{1}{2})$$

ولإعطاء مزيد من التطبيقات ، نورد المبرهنة الآتية والتي تعد من أهم المبرهنات الخاصة بدالة جاما ، ويعتمد برهانها على دالة بيتا ومبرهنات أخرى .

مبرهنة(٧)

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin\pi n}\qquad(٢.١٦)$$

البرهان

لإثبات هذه المبرهنة ، يجب أن نثبت أن :

(أ) $\sin\theta=\theta\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\theta^2}{n^2\pi^2})$ ، (ب) $\frac{1}{\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\theta-n\pi}$

ولإثبات (أ)، لاحظ أن :

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2})$$

وبالتكرار، نجد أن :

$$\sin\theta=2\{2\sin\frac{\theta}{4}\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{4})\}\{2\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4})\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4})\}$$

$$= 2^3 \sin\frac{\theta}{2^2}\sin\frac{\pi+\theta}{2^2}\cdot\sin\frac{2\pi+\theta}{2^2}\sin\frac{3\pi+\theta}{2^2} \qquad (٢.١٧)$$

وبالتكرار واستخدام قانون ضعف الزاوية نجد أن :

$$\sin\theta = 2^7 \sin\frac{\theta}{2^3}\sin\frac{\pi+\theta}{2^3}\cdot\sin\frac{2\pi+\theta}{2^3}\sin\frac{3\pi+\theta}{2^3}\sin\frac{4\pi+\theta}{2^3}\cdot \cdot\sin\frac{5\pi+\theta}{2^3}\cdot\sin\frac{6\pi+\theta}{2^3}\cdot\sin\frac{7\pi+\theta}{2^3} \qquad (٢.١٨)$$

بتكرار هذه العلاقة n من المرات نحصل على :

$$\sin\theta = 2^{2^n-1}\sin\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\pi+\theta}{2^n}\cdots\sin\frac{(2^n-1)\pi+\theta}{2^n}$$

بوضع $2^n = m$

$$\sin\theta = 2^{m-1}\sin\frac{\theta}{m}\sin\frac{\pi+\theta}{m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi+\theta}{m} \qquad (٢.١٩)$$

ولكن :

$$\sin\frac{(m-1)\pi+\theta}{m} = \sin\{\pi - \frac{\pi-\theta}{m}\} = \sin(\frac{\pi-\theta}{m}) \qquad (٢.٢٠)$$

بالمثل :

$$\sin\frac{(m-2)\pi+\theta}{m} = \sin\{\pi - \frac{2\pi-\theta}{m}\} = \sin(\frac{2\pi-\theta}{m}) \qquad (٢.٢١)$$

وعليه يمكن للقارئ إثبات صحة العلاقة :

$$\sin\frac{(m-r)\pi+\theta}{m} = \sin(\frac{r\pi-\theta}{m}) \qquad (٢.٢٢)$$

باستخدام هذه العلاقة في دالة $\sin\theta$ نجد أن :

$$\sin\theta = 2^{m-1}\sin\frac{\theta}{m}\{\sin\frac{\pi+\theta}{m}\sin\frac{\pi-\theta}{m}\}\{\sin\frac{2\pi+\theta}{m}\sin\frac{2\pi-\theta}{m}\} \cdots\{\sin\frac{(\frac{m}{2}-1)\pi+\theta}{m}\sin\frac{(\frac{m}{2}-1)\pi-\theta}{m}\}\sin\frac{\frac{m\pi}{2}+\theta}{m} \qquad (٢.٢٣)$$

باستخدام العلاقات المثلثية الآتية :

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\frac{1}{2}\{\cos 2B-\cos 2A\} \qquad (٢.٢٤)$$
$$=\sin^2 A-\sin^2 B$$

نتبع الآتي :

$$\sin\theta=2^{m-1}\sin\frac{\theta}{m}\{\sin^2\frac{\pi}{m}-\sin^2\frac{\theta}{m}\}\{\sin^2\frac{2\pi}{m}-\sin^2\frac{\theta}{m}\} \qquad (٢.٢٥)$$
$$\cdots\{\sin^2\frac{(\frac{m}{2}-1)\pi}{m}-\sin^2\frac{\theta}{m}\}\cos\frac{\theta}{m}$$

بقسمة طرفي المعادلة على $\sin\frac{\theta}{m}$ ثم وضع $0 \to \theta$ مع استخدام العلاقة :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (٢.٢٦)$$

نجد أن :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{m}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{m(\frac{\theta}{m})}{\sin\frac{\theta}{m}}=m \qquad (٢.٢٧)$$

وعليه نجد أن :

$$m=2^{m-1}\{\sin^2\frac{\pi}{2}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{m}\}\cdots\{\sin^2\frac{(\frac{m}{2}-1)\pi}{m}\} \qquad (٢.٢٨)$$

بقسمة المعادلة (٢.٢٨) على المعادلة (٢.٢٥) نجد أن :

$$\frac{\sin\theta}{m}=\sin\frac{\theta}{m}\cdot\{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\}\{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\}\cdots\{1-\frac{\sin^2\frac{\theta}{m}}{\sin^2(\frac{\frac{m}{2}-1}{m})\pi}\}\cos\frac{\theta}{m} \qquad (٢.٢٩)$$

عندما $m\to\infty$ وتطبيق المبرهنات التالية :

$$\text{(a)}\ \lim_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{\theta}{m}}{(\frac{1}{m})}=\theta\lim_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{\theta}{m}}{\frac{\theta}{m}}=\theta \qquad (٢.٣٠)$$

$$\text{(b)}\ \lim_{m\to\infty}\frac{\sin^2\frac{\theta}{m}}{\sin^2(\frac{r\pi}{m})}=\lim_{m\to\infty}\frac{\sin^2\frac{\theta}{m}}{(\frac{1}{m})^2}\cdot\frac{(\frac{1}{m})^2}{\sin^2(\frac{r\pi}{m})}=\frac{\theta^2}{r^2\pi^2} \qquad (٢.٣١)$$

$$\text{(c)}\ \lim_{m\to\infty}\cos\frac{\theta}{m}=1 \qquad (٢.٣٢)$$

فإن المعادلة (٢،٢٩) تصبح كالآتي :

$$\sin\theta=\theta(1-\frac{\theta^2}{\pi^2})(1-\frac{\theta^2}{2^2\pi^2})\cdots(1-\frac{\theta^2}{r^2\pi^2})$$

وعليه نجد أن :

$$\sin\theta=\theta\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\theta^2}{n^2\pi^2}) \qquad (٢،٣٣)$$

ولإثبات (ب)، لاحظ أن:

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{d}{d\theta}\ln\tan\tfrac{\theta}{2}=\frac{d}{d\theta}\ln\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{d}{d\theta}\ln\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{d}{d\theta}\ln\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{d}{d\theta}\left\{\ln2+\ln\sin^2\tfrac{\theta}{2}-\ln\sin\theta\right\}$$

وحيث إن $\frac{d}{d\theta}\ln 2=0$ نجد أن :

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{d}{d\theta}\left\{2\ln\sin\tfrac{\theta}{2}-\ln\sin\theta\right\} \qquad (٢،٣٤)$$

باستخدام العلاقة (٢،٣٣) في الطرف الأيمن من المعادلة (٢،٣٤) نجد أن :

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{d}{d\theta}\left\{2\ln\prod_{n=1}^{\infty}\theta(1-\frac{\theta^2}{4n^2\pi^2})-\ln\prod_{n=1}^{\infty}\theta(1-\frac{\theta^2}{n^2\pi^2})\right\}$$

$$=\frac{d}{d\theta}\left\{2\ln\theta+2\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\theta}{2\pi n})(1+\frac{\theta}{2\pi n})-\ln\theta-\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\theta}{\pi n})(1+\frac{\theta}{\pi n})\right\}$$

بتطبيق خواص اللوغاريتم نجد أن :

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{d}{d\theta}\left\{\ln\theta+2\sum_{n=1}^{\infty}\ln(2\pi n-\theta)+2\sum_{n=1}^{\infty}\ln(2\pi n+\theta)-\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\pi n-\theta)-\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\pi n+\theta)\right\}$$

بإجراء عملية التفاضل والترتيب نجد أن :

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\theta}+\{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta-2\pi n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta-2\pi n}\}+\{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta+2\pi n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta+\pi n}\} \qquad (٢،٣٥)$$

وعلى القارئ ملاحظة الآتي :

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta-2\pi n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta-\pi n}$$
$$=2\left[\frac{1}{\theta-2\pi}+\frac{1}{\theta-4\pi}+\frac{1}{\theta-6\pi}+\cdots\right]-\left[\frac{1}{\theta-\pi}+\frac{1}{\theta-3\pi}+\frac{1}{\theta-5\pi}+\cdots\right]$$

وأن مضاعفات π الفردية تبقى بينما مضاعفات π الزوجية تطرح من الحد الثاني وتبقى القيمة الموجبة الآتية :

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta-2\pi n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta-\pi n}=\left[\frac{1}{\theta-2\pi}+\frac{1}{\theta-4\pi}+\cdots\right]-\left[\frac{1}{\theta-\pi}+\frac{1}{\theta-3\pi}+\cdots\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\theta-\pi n}$$

وبالمثل نجد أن :

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta+2\pi n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\theta+\pi n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\theta+\pi n}$$

وعليه تصبح المعادلة (٢,٣٥) على الصورة :

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\theta-\pi n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\theta+\pi n}$$

وبالتعويض عن n بـ $-n$ في الجزء الثالث من الطرف الأيمن ، نجد أن

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\theta}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\theta-\pi n}+\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(-1)^{-n}}{\theta-\pi n}$$

وعليه نحصل على العلاقة :

$$\frac{1}{\sin\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\theta-\pi n} \qquad (٢,٣٦)$$

ولإثبات مبرهنة(٧)، لاحظ أن :

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}=\beta(n,m)$$

وبوضع $m=1-n$ ، نجد أن $\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\beta(n,1-n)=\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{-n}\,dt$

باستخدام التعويض $u=\frac{1}{t}-1$ الذي يحول المنطقة من [0,1] إلى [∞,0] نجد أن :

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\int_{\infty}^{0}\frac{1}{(1+u)^{n-1}}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{-n}\left(\frac{-1}{(1+u)^{2}}du\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{u^{-n}}{1+u}du$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{u^{-n}}{1+u}du+\int_{1}^{\infty}\frac{u^{-n}}{1+u}du \qquad (٢,٣٧)$$

و لتحويل الجزء الثاني من التكامل إلى المنطقة المحدودة [0,1] نستخدم التعويض $u=\frac{1}{v}$ فنجد أن :

$$\int_{1}^{\infty}\frac{u^{-n}}{1+u}du=\int_{1}^{0}\frac{v^{n}}{1+(\frac{1}{v})}\left(\frac{-1}{v^{2}}dv\right)=\int_{0}^{1}\frac{v^{n-1}}{1+v}dv$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{u^{n-1}}{1+u}du$$ (التكامل المحدد لا يتأثر بالبارمتر"الوسيط")

وعليه تصبح المعادلة (٢,٣٧) كالآتي :

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\int_{0}^{1}\frac{u^{-n}}{1+u}du+\int_{0}^{1}\frac{u^{n-1}}{1+u}du=\int_{0}^{1}[u^{-n}+u^{n-1}]\frac{du}{1+u}$$

بتطبيق مبرهنة ذات الحدين : $\frac{1}{1+u}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}u^{m},\quad |u|<1$

نجد أن مع اعتبار تقارب التكامل :

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\int_{0}^{1}[u^{-n}+u^{n-1}]u^{m}du=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\int_{0}^{1}[u^{m-n}+u^{n+m-1}]du$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\left[\frac{u^{m+n-1}}{m-n+1}+\frac{u^{n+m}}{n+m}\right]_{0}^{1}$$

وعليه نجد أن :

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m}\left[\frac{1}{m-n+1}+\frac{1}{n+m}\right] \qquad (0<n<1)\ (٢,٣٨)$$

وحيث إن :

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[\frac{1}{m-n+1}+\frac{1}{n+m}\right]=(\frac{1}{1-n}+\frac{1}{n})-(\frac{1}{2-n}+\frac{1}{1+n})+(\frac{1}{3-n}+\frac{1}{2+n})\cdots$$

$$=[\frac{1}{1-n}-\frac{1}{2-n}+\frac{1}{3-n}-\frac{1}{4-n}+\cdots]+[\frac{1}{n}-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}-\frac{1}{3+n}+\cdots]$$

$$=[-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-3}+\cdots]+[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m-n}$$

إذاً

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m-n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^m\pi}{(m\pi)-n\pi}=\frac{\pi}{\sin n\pi}$$

والآن إلى الأمثلة الآتية.

مثال(٩)

احسب التكاملات الآتية :

(أ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ ، (ب) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ ، (ج) $\int_0^{\infty}t^{\frac{-3}{2}}(1-e^{-t})dt$

(د) $\int_{-1}^1(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{2}}dx$ ، (هـ) $\int_0^1 x(1-x^3)^{\frac{1}{3}}dx$

الحل

(أ)
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cdot\cos^{-\frac{1}{2}}\theta\,d\theta$$

وعليه نجد أن $2m-1=\frac{-1}{2}$, $2n-1=\frac{1}{2}$ ومنها $m=\frac{1}{4}$, $n=\frac{3}{4}$

وبالتالي نحصل على :

$$I=\frac{1}{2}\beta(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4})=\frac{2\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})}=\frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{4})\Gamma(\tfrac{3}{4})$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{4})\Gamma(1-\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(ب)
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \int_0^1 (1-x^3)^{\frac{-1}{3}}\,dx$$

نفرض أن $t = x^3$. إذاً :

$$I = \int_0^1 (1-t)^{\frac{-1}{3}} \frac{1}{3} t^{\frac{-2}{3}} dt \;\; = \frac{1}{3}\int_0^1 t^{\frac{-2}{3}}(1-t)^{\frac{-1}{3}}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\beta(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(1)} = \frac{1}{3}\Gamma(\tfrac{1}{3})\Gamma(\tfrac{2}{3})$$

$$= \frac{1}{3}\Gamma(\tfrac{1}{3})\Gamma(1-\tfrac{1}{3}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}\frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(ج)
$$I = \int_0^\infty t^{\frac{-3}{2}}(1-e^{-t})\,dt$$

نلحظ أن عملية تقسيم هذا التكامل لا تعطي شيئا ، لأن تكامل الجزء الأول $\int_0^\infty t^{-\frac{3}{2}}dt$

متباعد عندما $t \to 0^+$. نستخدم التكامل بالتجزئة ونفرض أن :

$$u = 1-e^{-t}, \qquad t^{\frac{-3}{2}}\,dt = dv$$

$$I = \lim_{b\to\infty}\left[-2t^{\frac{-1}{2}}(1-e^{-t})\right]_0^b \;\; +2\int_0^\infty t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{-1}{2}}\,dt = 2\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}$$

(د)
$$I = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

باستخدام التحويل $x = 2t-1$ تتحول المنطقة $[-1,1]$ إلى المنطقة $[0,1]$ وعليه فإن :

$$I=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{1+2t-1}{1-2t+1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2dt \quad =2\int_{0}^{1}\frac{(2t)^{\frac{1}{2}}}{(2-2t)^{\frac{1}{2}}}dt$$

$$=2\int_{0}^{1}t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{-1}{2}}dt \quad =2\beta(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2})=\frac{2\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}$$

$$=2\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{3}{2})=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=\pi$$

(هـ) نفرض أن $I=\int_{0}^{1}x(1-x^3)^{\frac{1}{3}}dx$ و $x^3=u$. إذاً :

$$I=\int_{0}^{1}x(1-x^3)^{\frac{1}{3}}dx \;=\int_{0}^{1}u^{\frac{1}{3}}(1-u)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}du$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{1}u^{-\frac{1}{3}}(1-u)^{\frac{1}{3}}du \;=\frac{1}{3}\beta(\tfrac{2}{3},\tfrac{4}{3})=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)}$$

$$=\frac{1}{3}\Gamma(\tfrac{2}{3})\cdot\frac{1}{3}\Gamma(\tfrac{1}{3})=\frac{1}{9}\Gamma(\tfrac{1}{3})\Gamma(\tfrac{2}{3})$$

$$=\frac{1}{9}\Gamma(\tfrac{1}{3})\Gamma(1-\tfrac{1}{3}) \;=\frac{1}{9}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\pi}{27}$$

مثال(١٠)

باستخدام العلاقة :

$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin n\pi}$ ، أثبت صحة العلاقة $\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$

الحل

نفـــرض أن $y=\frac{x}{1+x}$. إذاً عنـــدما $x=0$ ، نجـــد أن $y=0$ ، وعنـــدما $x=\infty$ ، نجد أن $y=1$. لكن $x=\frac{y}{1-y}$. إذاً $dx=\frac{dy}{(1-y)^2}$ ، وعليه فإن :

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx=\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{-n}dy$$

$$=\beta(n,1-n)=\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$$

وهذه العلاقة تفيد كثيراً في حالات التكامل الآتية :

$$I=\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$$

بفرض $y^4=u$ نجد أن $y=u^{\frac{1}{4}}$ ، وعليه فإن :

$$I=\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{-3}{4}}}{1+u}du=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

وفي ما يلي تعريف دالتي جاما وبيتا غير المكتملتين.

تعرف دالة جاما غير المكتملة (Incomplete Gamma Function) بالدالتين

$$\Gamma(n,\alpha)=\int_\alpha^\infty e^{-t}\,t^{n-1}\,dt \tag{٢,٣٩}$$

$$\gamma(n,\alpha)=\int_0^\alpha e^{-t}\,t^{n-1}\,dt\,,\quad \alpha>0 \tag{٢,٤٠}$$

وبجمعهما نجد أن :

$$\Gamma(n)=\Gamma(n,\alpha)+\gamma(n,\alpha) \tag{٢,٤١}$$

أما دالة بيتا غير المكتملة (Incomplete Beta Function) فتعرف كالآتي :

$$\beta(x,a,b)=\int_0^x t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\,dt \tag{٢,٤٢}$$

وعندما $x=1$ ، نجد أن $\beta(1,a,b)=\beta(a,b)$

تمـــارين

١- احسب الآتي

(أ) $\frac{\Gamma(7)}{2\Gamma(4)\Gamma(3)}$ ، (ب) $\frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})}$ ، (ج) $\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5}{2})$

(د) $\beta(3,5)$ ، (هـ) $\beta(\frac{3}{2},2)$ ، (و) $\beta(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

(ز) $\beta(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

٢- احسب التكاملات الآتية

(أ) $\int_0^\infty z^2 e^{-z^2} dz$ ، (ب) $\int_0^\infty x^6 e^{-3x} dx$ ، (ج) $\int_0^\infty x^4 e^{-x} dx$

(د) $\int_0^\infty y^3 e^{-2y^5} dy$ ، (هـ) $\int_0^\infty \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}} dx$ ، (و) $\int_0^\infty e^{-x^3} dx$

(ز) $\int_0^1 x^2 (1-x)^3 dx$ ، (ح) $\int_0^1 u^{\frac{3}{2}} (4-u)^{\frac{5}{2}} du$

(ط) $\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ ، (ي) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx$

٣- عين التكاملات الآتية

(أ) $\int_0^1 (\ln x)^4 dx$ ، (ب) $\int_0^1 (\ln \frac{1}{x})^{n-1} dx$ ، (د) $\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt$

(د) $\int_0^1 \sqrt[3]{\ln \frac{1}{x}}\, dx$ ، (هـ) $\int_0^1 (x \ln x)^3 dx$ ، (و) $\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta$

(ز) $\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^4 - y^4}}$

٤- عين التكاملات الآتية

(أ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \sin^2\theta d\theta$ ، (ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^4\theta d\theta$

(ج) $\int_0^{\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy$ ، (د) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^5} dx$

٥- أثبت صحة العلاقات الآتية :

(أ) $\int_0^{\infty} e^{-2at-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{a^2}$

(ب) $\int_0^{\infty} e^{-at} t^n dt = \frac{1}{a^{n+1}} \Gamma(n+1)$

(ج) $\int_b^a (x-b)^{p-1}(a-x)^{q-1} dx = (a-b)^{p+q-1} \beta(p,q)\, , y = \frac{x-b}{a-b}, a > b$

(د) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n\theta d\theta = \frac{1}{2}\{\Gamma(\frac{1+n}{2})\}\Gamma(\frac{1-n}{2})\ , \quad |n| < 1$

٦- عبر عن التكاملات الآتية بدلالة دالتي بيتا أو جاما ثم احسب الناتج :

(أ) $\int_0^1 (\ln \frac{1}{x})^{a-1} dx \quad , a > 0$ ، (ب) $\int_0^1 (\frac{1}{x} - 1)^{\frac{1}{4}} dx$

(ج) $\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t)}$ ، (د) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$

(هـ) $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx \quad (m > -1 \ , p > -1 \ , n > 0)$

الفصل الثالث

كثيرات حدود ودوال لجندر
Legendre Polynomials and Functions

ظهرت معادلة لجندر (١٧٥٢- ١٨٣٣م) التفاضلية في أبحاثه المتعلقة بدراسة الجاذبية ونظرية الجهد، ولهذه المعادلة والدوال المرتبطة بها تطبيقات أخرى في ميكانيكا الموائع، وميكانيكا الكم وغيرها من العلوم الفيزيائية والهندسية ، ويضم هذا الفصل خمسة بنود تناولنا فيها معادلة ودوال لجندر وأشكالها وعلاقة التعامد وخواصها إضافة إلى دالة لجندر المساعدة والعلاقات التكرارية لكثيرات الحدود وبعض التطبيقات المهمة عليها.

(٣,١) معادلة لجندر وحلها

يضم هذا الجزء معادلة لجندر وطريقة حلها للحصول على كثيرة حدود لجندر، تسمى المعادلة التفاضلية :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+ky=0 \qquad (٣,١)$$

معادلة لجندر حيث k مقدار ثابت ، ويفترض أن يكون $k=l(l+1)$ ولـذلك نكتب المعادلة (٣،١) على الصورة :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0 \tag{٣،٢}$$

بكتابة هذه المعادلة على الصورة القياسية :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0 \tag{٣،٣}$$

حيث

$$q(x)=\frac{-2x^2}{1-x^2}\ ,\ r(x)=\frac{l(l+1)x^2}{1-x^2}$$

يتضح لنا من المعادلة (٣،٣) أنه يمكن تمثيل كل من $q(x)\ ,r(x)$ على شكل كثيرات حدود مرتبطة بالشرط $|x|<1$ وعليه يمكن القول لتحقيق شرط معادلة لجندر إن $x\in(-1,1)$ أو $-1<x<1$

بفرض الحل على الصورة :

$$z(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s} \tag{٣،٤}$$

والتفاضل مرتين :

$$\frac{dz}{dx}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s-1}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s-2} \tag{٣،٥}$$

ونلحظ عند تعيين المعادلة الأساسية استخدام ذات الحدين للحصول على تقريب لمفكوك $\frac{1}{1-x^2}$ في المعادلة (٣،٣) ، وعليه نحصل على الآتي :

$$a_0s(s-1)=0 \tag{٣،٦}$$

$$a_1 s(s+1)=0 \qquad (٣.٧)$$

وللحصول على الحد العام نستخدم العلاقة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s}$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}l(l+1)a_n x^{n+s}=0$$

وعليه

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-2}-\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+s)(n+s-1)-l(l+1)\}a_n x^{n+s}=0$$

ويكون الحد العام :

$$(n+s+2)(n+s+1)a_{n+2}-\{(n+s)(n+s+1)-l(l+1)\}a_n=0 \quad (٣.٨)$$

المعادلة (٣.٦) توضح أن الجذور الأساسية هي $s=0$, $s=1$ وإذا كان $s=1$ فإن $a_1=0$ وعليه نأخذ $s=0$ كمقياس للحل.

وفي هذه الحالة عند $s=0$ نكتب العلاقة (٣.٨) كالآتي :

$$a_{n+2}=\frac{n(n+1)-l(l+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad (٣.٩)$$

لكن

$$n(n+1)-l(l+1)=n^2+n-l^2-l=(n^2-l^2)+(n-l)$$
$$=(n-l)(n+l+1)$$

إذاً يمكن كتابة المعادلة (٣.٩) على الصورة :

$$a_{n+2}=-\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad (٣.١٠)$$

العلاقة (٣.١٠) تؤدي إلى العلاقات الزوجية والفردية الآتية :

$$a_2=\frac{-l(l+1)}{1\cdot 2}a_0 \quad , \quad a_3=\frac{-(l-1)(l+2)}{2\cdot 3}a_1$$

$$a_4 = \frac{-(l-2)(l+3)}{3\cdot 4} a_2 \qquad , \quad a_5 = \frac{-(l-3)(l+4)}{4\cdot 5} a_3$$

$$= \frac{(-1)^2 l(l-2)(l+1)(l+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} a_0 \ , \qquad = \frac{(-1)^2 (l-1)(l-3)(l+2)(l+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} a_1$$

وبصورة عامة نجد أن :

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{l(l-2)(l-4)(l-6)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!} a_0 \quad (٣,١١)$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(l-1)(l-3)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!} a_1 \quad (٣,١٢)$$

وعليه يكون :

$$z(x,0) = a_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{l(l-2)\cdots(l-2n+2)(l+1)(l+3)\cdots(l+2n-1)}{(2n)!} x^{2n} \right\} \quad (٣,١٣)$$
$$+ a_1 \left\{ x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(l-1)(l-3)\cdots(l-2n+1)(l+2)(l+4)\cdots(l+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right\}$$

ويمكن كتابة المعادلة (٣,١٣) على الصورة :

$$z(x,0) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \quad (٣,١٤)$$

حيث إن $y_2(x), y_1(x)$ يمثلان حلين مستقلين لمعادلة لجندر التفاضلية ، وهذان الحلان متقاربان داخل الفترة $-1 < x < 1$.

وكثير من التطبيقات المتعلقة بمعادلة لجندر تحتاج إلى دراسة الحل عند النقط $x = \pm 1$ وهو ما لم تحدده المبرهنات التي استخدمت سابقاً في حل المتسلسلات.

والسؤال المطروح الآن هو كيفية إيجاد الحل عند $x = \pm 1$ والطريق الوحيد والأمثل لذلك هو جعل المتسلسلة اللانهائية متسلسلة محدودة ، وهذا ما يجعلنا نختار قيم l الموجبة فقط ، ويتضح ذلك من العلاقة (٣,١١) فإذا وضعنا $l = 2n$ (عدد صحيح زوجي موجب) نجد أن الحدود $a_{2n} \neq 0$ بينما $a_{2n+2} = 0$ وكذلك في العلاقة (٣,١٢) عندما نضع $l = 2n+1$ (عدد صحيح فردي موجب) فإن الحدود $a_{2n+1} \neq 0$

بينما $a_{2n+3} = 0$. نستنتج مما تقدم أنه إذا كان l عدداً زوجياً صحيحاً فإن $y_1(x)$ تصبح كثيرة حدود. بينما إذا كان l عدداً فردياً صحيحاً فإن $y_2(x)$ تصبح كثيرة حدود.

إذاً في الحالتين تكون قوى كثيرة الحدود من الدرجة x^l . وحيث إن العلاقة (٣.١٤) ممثلة في كل من $y_2(x), y_1(x)$ لذلك يجب الوصول إلى تمثيل وحيد لقيم l سواء أكانت فردية أم زوجية، ويتم ذلك بكتابة العلاقة (٣.١٠) في الصورة الآتية :

$$a_n = \frac{-(n+2)(n+1)}{(l-n)(l+n+1)} a_{n+2} \qquad (٣.١٥)$$

ووضع $n = l-2$ نحصل على الآتي :

$$a_{l-2} = -\frac{l(l-1)}{2(2l-1)} a_l \;\; , \;\; a_{l-4} = \frac{(l-2)(l-3)}{4(2l-3)} a_{l-2} \qquad (n = l-4)$$

$$= (-1)^2 \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2 \cdot 4(2l-1)(2l-3)} a_l$$

وعليه يمكن كتابة الصورة العامة كالآتي :

$$a_{l-2r} = (-1)^r \frac{l(l-1)(l-2)\cdots(l-2r+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2r(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2r+1)} a_l \qquad (٣.١٦)$$

وعليه فإن قيم l الزوجية المرتبطة بالحل $y_1(x)$ وقيم l الفردية المرتبطة بالحل $y_2(x)$ تكون كالآتي :

$$y(x) = a_l x^l + a_{l-2} x^{l-2} + a_{l-4} x^{l-4} + \cdots + \begin{cases} a_0 & \text{إذا كان } l \text{ عدداً زوجياً} \\ a_1 (l-1) & \text{إذا كان } l \text{ عدداً فردياً} \end{cases} \qquad (٣.١٧)$$

والتي قد تكتب على الشكل :

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} a_{l-2r} x^{l-2r} \;, \left[\frac{l}{2}\right] = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{إذا كان } l \text{ عدداً زوجياً} \\ \frac{1}{2}(l-1) & \text{إذا كان } l \text{ عدداً فردياً} \end{cases} \qquad (٣.١٨)$$

وقد تكون الصورة كالآتي :

$$y(x)=a_l\sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^r\frac{l(l-1)(l-2)\cdots(l-2r+1)}{2\cdot4\cdots2r(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2r+1)}x^{l-2r} \quad (٣,١٩)$$

وحيث إن

$$l(l-1)\cdots(l-2r+1)=l(l-1)\cdots(l-2r+1)\cdot\frac{(l-2r)(l-2r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{(l-2r)(l-2r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{l!}{(l-2r)!}$$

وإن

$$(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2r+1)=(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2r+1)\cdot$$
$$\cdot\frac{2l(2l-2)(2l-4)\cdots(2l-2r)}{2l(2l-2r)(2l-4)\cdots(2l-2r+2)(2l-2r)}$$

$$=\frac{(2l)!}{2^r\left[l(l-1)(l-2)\cdots(l-r+1)(l-r)\right]}$$

$$=\frac{(2l)!(l-r)!}{2^r l!(2l-2r)!}$$

كما أن $2\cdot4\cdot6\cdots2r=2^r r!$

إذاً تصبح المعادلة (٣,١٩) على الصورة :

$$y(x)=a_l\sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^r\frac{l!}{2^r(l-2r)!r!}\cdot\frac{2^r(2l-2r)!l!}{(2l)!(l-r)!}x^{l-2r}$$

بالاختصار نحصل على :

$$y(x)=a_l\sum_{r=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^r\frac{(l!)^2(2l-2r)!x^{l-2r}}{r!(l-2r)!(l-r)!(2l)!} \quad (٣,٢٠)$$

وهذا الحل صحيح لأي قيمة a_l وعليه فإذا افترضنا أن $a_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$ فإننا نحصل على ما يسمى بكثيرة حدود لجندر من الرتبة l وهي :

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{[\frac{l}{2}]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!x^{l-2r}}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} \qquad (٣,٢١)$$

والتي تعتبر حلاً لمعادلة لجندر لجميع قيم $x\in[-1,1]$.

(٣,٢) الصورة العامة والأشكال الأخرى لدالة لجندر

يضم هذا الجزء بعض المبرهنات المهمة المتعلقة بدالة لجندر

مبرهنة(١) إذا كان $|x|\le 1, |t|<1$ فإن

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n P_n(x) \qquad (٣,٢٢)$$

البرهان

هذه المبرهنة توضح لنا أنه عند إيجاد مفكوك المقدار $(1-2tx+t^2)^{\frac{-1}{2}}$ فإن معامل t^n هو ما يطلق عليه $P_n(x)$ وهذا ما سنثبته.

بما أن

$$\begin{aligned}(1-2tx+t^2)^{\frac{-1}{2}}&=\{1-t(2x-t)\}^{\frac{-1}{2}}\\&=1+(\frac{-1}{2})\{-t(2x-t)\}+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})}{2!}\{-t(2x-t)\}^2\\&\quad+\cdots+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})\cdots\{\frac{-1}{2}(2r-1)\}}{r!}\{-t(2x-t)\}^r+\cdots\end{aligned}$$

إذاً

$$(1-2tx+t^2)^{\frac{-1}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r 1\cdot3\cdot5\cdots(2r-1)}{2^r r!}(-1)^r t^r(2x-t)^r \qquad (٣,٢٣)$$

$$1\cdot3\cdot5\cdots(2r-1)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(2r-1)(2r)}{2\cdot4\cdot6\cdots2r}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots2r}{2^r r!}$$

ومن (٣,٢٢)، (٣,٢٣) نجد أن :

$$(1-2tx+t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!t^r}{2^{2r}(r!)^2}(2x-t)^r \qquad (٣,٢٤)$$

وحيث إن :

$$(2x-t)^r = \sum_{m=0}^{r} C_m^r (2x)^{r-m}(-t)^m, \qquad C_m^r = \frac{r!}{m!(r-m)!}$$

وعليه تصبح المعادلة (٣,٢٤) على الصورة :

$$(1-2tx+t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} \sum_{m=0}^{r} C_m^r (-1)^m t^{r+m}(2x)^{r-m} \qquad (٣,٢٥)$$

ولإيجاد معامل t^n نضع $r+m=n$ وللقيمة الثابتة r يؤخذ التعويض $m=n-r$ وحيث إن $0 \le m \le r$ ، إذاً يجب أن تحقق المتباينة $0 \le n-r \le r$ والتي تعطي $0 \le n-r$ أو $r \le n$ وكذلك $n-r \le r$ ، $n \le 2r$ وعليه $\frac{n}{2} \le r \le n$. ولذلك نلحظ أنه عندما تكون n زوجية فإن r تأخذ قيماً بين كل من $\frac{n}{2}, n$. أما إذا كانت n فردية فإن r تأخذ القيم الواقعة بين $\frac{1}{2}(n+1), n$. وبناء على ذلك نأخذ معامل t^n بعد وضع $n=r+m$ في الطرف الأيمن من المعادلة (٣,٢٥) يكون كالآتي :

$$\frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} C_{n-r}^r (-1)^{n-r}(2x)^{r-(n-r)}$$

حيث

$$r = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{إذا كان n عدداً زوجياً} \\ \frac{n+1}{2} & \text{إذا كان n عدداً فردياً} \end{cases}$$

ومنه يكون

$$(\text{معامل } t^n) = \sum^{n} \frac{(2r)!}{2^{2r}(r!)^2} C_{n-r}^r (-1)^{n-r}(2x)^{2r-n} \qquad (٣,٢٦)$$

بأخذ الفرض $k = n - r$ وتغيير حدود الطرف الأيمن في المعادلة (٣،٢٦) نجد أن:

$$(t^n \text{ معامل}) = \sum_{k=\begin{cases}\frac{n}{2} & n \text{ زوجي}\\ \frac{n-1}{2} & n \text{ فردي}\end{cases}}^{n} \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}\{(n-k)!\}^2} C_k^{n-k}(-1)^k(2x)^{n-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}\{(n-k)!\}^2} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-2k)!k!}(-1)^k 2^{n-2k} x^{n-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!x^{n-2k}}{2^n(n-k)!(n-2k)!k!} = P_n(x) \qquad (٣،٢٧)$$

وعليه تكون المبرهنة قد أثبتت.

مبرهنة(٢) "علاقة رودريجس Rodrigues":

يمكن التعبير عن دالة لجندر بالعلاقة التفاضلية الآتية:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \qquad (٣،٢٨)$$

البرهان

بما أن $(x^2-1)^n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r C_r^n x^{2(n-r)}$. إذاً بالتفاضل n من المرات، نجد أن:

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r C_r^n x^{2(n-r)} \qquad (٣،٢٩)$$

وحيث إن المشتقة النونية لقوى x الأقل من l تنعدم، وعليه نجد أن:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2r} = 0, \quad n < 2r, \quad r > \frac{n}{2}$$

وعليه تتحول $\sum_{r=0}^{n}$ إلى $\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}}$ عندما تكون n زوجية، وكذلك $\sum_{r=0}^{n}$ إلى $\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}$

عندما تكون n فردية، وبوجه عام تتحول $\sum_{r=0}^{n}$ إلى $\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}$. وحيث إن:

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$$

فإن :

$$\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2r} = \frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}x^{n-2r} \qquad (٣.٣٠)$$

ومن (٣.٣٠)، (٣.٢٩) نجد أن

$$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^r n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}x^{n-2r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r} = P_n(x)$$

مبرهنة (٣) تمثيل لابلاس "Laplace" التكاملي

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\}^n d\theta\,, \quad |x|\ge 1 \qquad (٣.٣١)$$

البرهان

لإثبات هذه العلاقة نوجد أولاً قيمة التكامل التالي :

$$I = \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+b\cos\theta}, \qquad -1<b<1$$

ولإيجاد التكامل نستخدم التعويض $t=\tan\frac{\theta}{2}$ ، وعليه عندما $\theta=0$ نحصل على $t=0$ ، وعندما $\theta=\pi$ نجد أن $t=\infty$. إذاً :

$$I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+b(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)}=\int_0^{\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt}{1+b[\frac{2}{1+t^2}-1]}$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{2dt}{(1+b)+t^2(1-b)}=\frac{2}{(1-b)}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\frac{1+b}{1-b}+t^2}$$

$$=\frac{2}{(1-b)}\cdot\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\left[\tan^{-1}\frac{t\sqrt{1-b}}{\sqrt{1+b}}\right]_0^{\infty}$$

$\sqrt{1+t^2}$ ، t ، $\frac{\theta}{2}$ ، 1

وعليه نجد أن :

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+b\cos\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{1-b^2}} \qquad (٣.٣٢)$$

ثانيا : نستخدم التعويض $b=-\left\{\frac{u\sqrt{x^2-1}}{1-ux}\right\}$ في طرفي المعادلة (٣.٣٢) فنجد أن

$$\frac{1}{1+b\cos\theta}=\frac{1}{1-\frac{u\sqrt{x^2-1}}{1-ux}\cos\theta}$$

$$=(1-ux)[1-u\{x+\sqrt{x^2-1}\}\cos\theta]^{-1}$$

وبتطبيق مبرهنة ذات الحدين ، نجد أن

$$\frac{1}{1+b\cos\theta}=(1-ux)\sum_{n=0}^{\infty}u^n\{x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\}^n \qquad (٣.٣٣)$$

لكن :

$$\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2(x^2-1)}{(1-ux)^2}}}=\frac{(1-ux)}{\sqrt{(1-ux)^2-u^2(x^2-1)}}$$

إذاً :

$$\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{1-ux}{\sqrt{1-2ux+u^2}} \qquad (٣،٣٤)$$

وباستخدام العلاقتين (٣،٣٤)، (٣،٣٣) والعلاقة (٣،٣٢) نجد أن :

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty u^n \{x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta\} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1-2ux+u^2}}$$

باستخدام مبرهنة(١) في الطرف الأيمن نحصل على العلاقة :

$$\pi \sum_{n=0}^\infty u^n P_n(x) = \sum_{n=0}^\infty u^n \int_0^\pi [x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta] d\theta$$

بمطابقة معاملات u^n تتحقق المبرهنة.

مما سبق دراسته فإن الأشكال المختلفة التي يمكن أن تمثلها دالة لجندر هي :

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} x^{n-2r}$$

ويمكن استنتاج العلاقات الآتية :

$$\begin{aligned} &P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x, \quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \\ &P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x), \quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \end{aligned} \qquad (٣،٣٥)$$

وهكذا ، ومن الواضح أنها كلها ممثلة بكثيرات حدود ودرجتها تتوقف على قيمة n كما سبق إيضاحه.

وهناك بعض النتائج المهمة عندما تأخذ x القيم $x=-1,0,1$ وهي :

١- عند $x=1$ نستخدم علاقة رودرج الآتية :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^\infty t^n P_n(x)$$

فنحصل على الآتي :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n P_n(1)$$

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n P_n(1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}t^n P_n(1), \quad |t|<1$$

وعليه نحصل على :

$$P_n(1)=1 \qquad (٣,٣٦)$$

٢- عندما $x=-1$ نجد أن :

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n P_n(-1), |t|<1$$

وعليه نحصل على العلاقة :

$$P_n(-1)=(-1)^n \qquad (٣,٣٧)$$

٣- عندما $x=0$ نجد أن :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n P_n(0)$$

وحيث إن

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=1+(\tfrac{-1}{2})t^2+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})}{2!}(t^2)^2+\cdots+$$

$$+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})\cdots\{-\frac{(2n-1)}{2}\}(t^2)^n}{n!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)t^{2n}}{2^n n!}$$

وعليه يمكن الحصول على الآتي :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(2n-2)(2n-1)2n}{2^n n!\,2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)2n}t^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!\,2^n n!}t^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}$$

وعليه نجد أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(0)$$

بمطابقة معاملات t^n ، n عددا زوجيا و n عددا فرديا نجد أن :

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$P_{2n+1}(0)=0 \qquad (٣،٣٨)$$

هذه النتائج الخاصة بالمعادلة (٣،٣٨) يمكن للقارئ الحصول عليها مباشرة من معادلة التعريف لدالة لجندر. وللحصول على المشتقات لدالة لجندر عند $x=\pm1$ ، نستخدم المعادلة المحققة لدالة لجندر وهي :

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}+n(n+1)P_n(x)=0 \qquad (٣،٣٩)$$

ثم نضع أولاً $x=1$ فنحصل على $-2P_n'(1)+n(n+1)P_n(1)=0$ ، ومنها على :

$$P_n'(1)=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (٣،٤٠)$$

ثانياً عندما $x=-1$ نحصل على :

$$P_n'(-1)=\frac{-n(n+1)}{2}P_n(-1)$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot \qquad (٣،٤١)$$

(٣،٣)علاقة التعامد وخواصها

مبرهنة(٤)

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm},$$
$$\delta_{nm}=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases} \qquad (٣،٤٢)$$

البرهان

لإثبات هذه المبرهنة نستخدم المعادلتين الآتيتين :

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}+n(n+1)P_n(x)=0$$
$$(1-x^2)\frac{d^2P_m(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_m(x)}{dx}+m(m+1)P_m(x)=0$$

واللتين يمكن كتابتهما على الصورة :

$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P_n'\}+n(n+1)P_n=0 \qquad (٣،٤٣)$$
$$\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P_m'\}+m(m+1)P_m=0 \qquad (٣،٤٤)$$

وبضرب المعادلة (٣،٤٣) في الدالة P_m والمعادلة (٣،٤٤) في الدالة P_n ثم الطرح نحصل على :

$$P_m\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P_n'\}-P_n\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P_m'\}+\{n(n+1)-m(m+1)\}P_nP_m=0 \qquad (٣،٤٥)$$

وحيث إن

$$\frac{d}{dx}\{P_m(1-x^2)P_n'\}=P_m\frac{d}{dx}\{(1-x^2)P_n'\}+(1-x^2)P_m'P_n'$$

وبالمثل

$$\frac{d}{dx}\left\{P_n(1-x^2)P'_m\right\}=P_n\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)P'_m\right\}+(1-x^2)P'_mP'_n$$

بالطرح

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left\{P_m(1-x^2)P'_n-P_n(1-x^2)P'_m\right\}\\&=P_m\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)P'_n\right\}-P_n\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)P'_m\right\}\end{aligned} \qquad (٣.٤٦)$$

باستخدام المعادلة (٣.٤٦) والمعادلة (٣.٤٥) نجد أن :

$$\frac{d}{dx}\left\{P_m(1-x^2)P'_n-P_n(1-x^2)P'_m\right\}=\left\{m(m+1)-n(n+1)\right\}P_nP_m$$

بالتكامل بالنسبة ل x خلال الفترة $[-1,1]$ نحصل على :

$$\left[m(m+1)-n(n+1)\right]\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\left[(1-x^2)P_mP'_n-(1-x^2)P_nP'_m\right]_{-1}^{1}$$ ومنه

نحصل على :

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0\,,\quad m\neq n \qquad (٣.٤٧)$$

ولإثبات الحالة عندما $n=m$ نستخدم الدالة :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x)$$

بالتربيع نحصل على :

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x)\right\}^2$$

أو على الصورة :

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^nP_n(x)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}t^mP_m(x)\;=\;\sum_{n,m=0}^{\infty}t^{n+m}P_n(x)P_m(x)$$

وبإجراء التكامل بالنسبة للمتغير x نجد أن :

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+t^2)-2xt}=\sum_{n,m=0}^{\infty}t^{n+m}\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx \qquad (٣.٤٨)$$

لكن

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+t^2)-2xt}=\left[\frac{1}{-2t}\ln(1+t^2-2xt)\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{-1}{2t}\left[\ln(1-2t+t^2)-\ln(1+2t+t^2)\right]$$

$$=\frac{1}{t}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right],\quad 0<t<1$$

وباستخدام مفكوك $\ln(1+t),\ln(1-t)$ نحصل على :

$$I=\frac{1}{t}\left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{t}\left[2t+\frac{2t^3}{3}+\frac{2t^5}{5}+\cdots\right]=2\left\{1+\frac{t^2}{3}+\frac{t^4}{5}+\frac{t^6}{7}+\cdots\right\}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}$$

وباستخدام هذه النتيجة و (٣.٤٧) نصل إلى :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n+1}=\sum_{n,m=0}^{\infty}t^{n+m}\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2\,dx$$

وبمطابقة معاملات t^{2n} نحصل على :

$$\int_{-1}^{1}\{P_n(x)\}^2dx=\frac{2}{2n+1}$$

ومن أحد تطبيقات مبرهنة التعامد تمثيل كثيرات الحدود على شكل كثيرة حدود لجندر كالآتي :

مبرهنة(٥) "بدون برهان" [٩]

يمكن تمثيل أي كثيرة حدود $f(x)$ من الدرجة n بالعلاقة :

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n}C_rP_r(x),\ \ -1\le x\le 1 \qquad (٣،٤٩)$$

وهذا التمثيل وحيد ويمكن تعيين قيمة C_r كالآتي :

$$f(x)P_m(x)=\sum_{r=0}^{\infty}C_rP_r(x)P_m(x)$$

بالتكامل مع تطبيق المبرهنة الخاصة بالتعامد ، نجد أن

$$C_r=(\frac{2r+1}{2})\int_{-1}^{1}f(x)P_r(x)dx \qquad (٣،٥٠)$$

مثال(١) : مثل الدالة :

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 1 & 0<x<1\end{cases}$$

ككثيرة حدود لجندر لانهائية.

الحل

حيث إن المطلوب التمثيل بعدد لانهائي من الحدود نستخدم العلاقة (٣،٥٠) عند القيم المختلفة ل r وعليه :

$$C_0=\frac{1}{2}\left[\int_0^1P_0(x)dx\right]=\frac{1}{2}[x]_0^1\ \ =\frac{1}{2}$$

$$C_1=\frac{3}{2}\int_0^1P_1(x)dx=\frac{3}{2}\int_0^1xdx=\frac{3}{4}$$

$$C_2=\frac{5}{2}\int_0^1P_2(x)dx=\frac{5}{2}\int_0^1\frac{1}{2}(3x^2-1)dx=0$$

$$C_3=\frac{7}{2}\int_0^1P_3(x)dx=\frac{7}{2}\int_0^1\frac{1}{2}(5x^3-3x)dx=\frac{-7}{16}$$

وعليه نجد أن :

$$f(x)=\frac{1}{2}P_0(x)+\frac{3}{4}P_1(x)-\frac{7}{16}P_3(x)+\cdots$$

(٣,٤) "علاقات لجندر التكرارية"

يضم هذا الجزء العلاقات التكرارية لكثيرات حدود لجندر وبعض نتائجها، ولإيجاد علاقات تكرارية لدالة لجندر نستخدم الآتي :

$$(1-2xt+t^2)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) \qquad (٣.٥١)$$

بتفاضل هذه العلاقة بالنسبة للمتغير t نجد أن :

$$(\frac{-1}{2})(1-2xt+t^2)^{\frac{-3}{2}}(-2x+2t) = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1} P_n(x) \qquad (*)$$

هذه العلاقة (*) يمكن أن تكتب بعد الضرب في المقدار $(1-2xt+t^2)$ كالآتي :

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1} P_n(x)$$

بمطابقة معاملات t^n نجد أن :

$$xP_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x)$$

وبالتالي نحصل على العلاقة التكرارية التالية :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \qquad (٣.٥٢)$$

بمفاضلة المعادلة (٣.٥١) بالنسبة إلى x نحصل على

$$(\frac{-1}{2})(-2t)(1-2xt+t^2)^{\frac{-3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n'(x)$$

بضرب هذه المعادلة في المقدار $(x-t)$ مع استخدام العلاقة (❖) نجد أن

$$t\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1} P_n(x) = (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n'(x)$$

بمطابقة معاملات t^n نحصل على العلاقة التفاضلية التكرارية التالية :

$$xP_n' - P_{n-1}' = nP_n \qquad (٣.٥٣)$$

لحذف x من المعادلة (٣.٥٣) نفاضل المعادلة (٣.٥٢) بالنسبة إلى x فنحصل على :

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(2n+1)P_n(x)-(2n+1)xP'_n(x)+nP'_{n-1}(x)=0$$

باستخدام المعادلة (٣.٥٣) نجد أن :

$$(n+1)P'_{n+1}-(2n+1)P_n-(2n+1)\left[nP_n+P'_{n-1}\right]+nP'_{n-1}=0$$

$$(n+1)\left[P'_{n+1}-P'_{n-1}\right]=(n+1)(2n+1)P'_n$$

ومنه نصل إلى :

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x) \qquad (٣.٥٤)$$

مثال(٢)

أوجد $P_4(x),P_3(x),P_2(x)$

الحل

نلحظ أن المطلوب علاقة تكرارية لذلك نستخدم العلاقة

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$$

عندما $n=1$ نجد أن :

$$2P_2(x)=3xP_1(x)-P_0(x)$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

عندما $n=2$

$$3P_3(x)=5xP_2(x)-2P_1(x)$$

$$3P_3(x)=\frac{5}{2}(3x^3-x)-2x$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

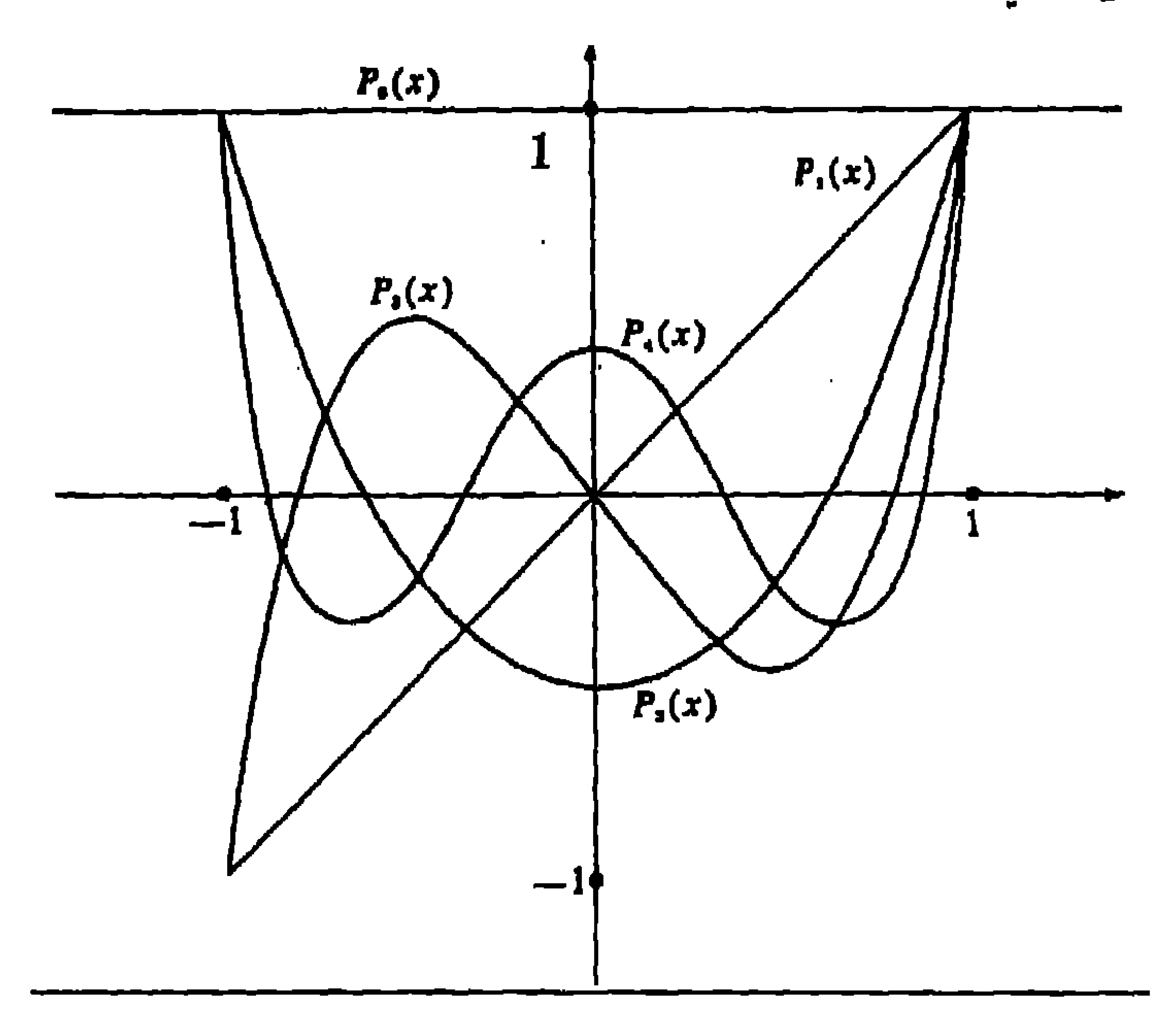
عندما $n=3$

$$5P_4(x) = 7xP_3(x) - 3P_2(x)$$

$$5P_4(x) = \frac{7}{2}[5x^4 - 3x^2] - \frac{3}{2}[3x^2 - 1]$$

$$P_4(x) = \frac{7}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{5}{10}$$

ويمثل الشكل الآتي منحنيات بعض كثيرات حدود لجندر:



مثال(٣)

أثبت صحة العلاقة الآتية :

$$P_5'(x) = 9P_4(x) + 5P_2(x) + P_0(x)$$

الإثبات

نلحظ أن الطرف الأيسر به تفاضل ، لذلك نستعمل العلاقة

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x)$$

عند $n = 4$

$$P_5'(x) - P_3'(x) = 9P_4(x)$$

عند $n = 2$

$$P_3'(x) - P_1'(x) = 5P_2(x)$$

بالجمع نجد أن :

$$P_5'(x) = 9P_4(x) + 5P_2(x) + P_1'(x)$$

لكن $P_1(x) = x$ ، إذاً :

$$P_1'(x) = 1 = P_0(x)$$

وعليه تكون العلاقة صحيحة.

مثال(٤)

أثبت صحة العلاقة

$$\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx = \frac{2n}{4n^2 - 1}$$

الإثبات

باستعمال العلاقة :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

وبضربها في P_{n-1} نحصل على :

$$(n+1)P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - (2n+1)xP_n(x)P_{n-1}(x) = -nP_{n-1}^2(x)$$

بإجراء التكامل مع استعمال القاعدة :

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

نجد أن :

$$(2n+1)\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx = \frac{2n}{2n-1}$$

وبالقسمة على $(2n+1)$ يحصل المطلوب.

مثال(٥)

أثبت صحة العلاقة :

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

ثم ادرس الحالة عند $n=1$.

الإثبات

باستخدام العلاقة :

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

بوضع $n+1$ بدلاً من n نجد أن :

$$(2n+3)xP_{n+1}(x) = (n+2)P_{n+2}(x) + (n+1)P_n(x) \qquad (١)$$

بوضع $n-1$ بدلاً من n نجد أن :

$$(2n-1)xP_{n-1}(x) = nP_n(x) + (n-1)P_{n-2}(x) \qquad (٢)$$

بضرب طرفي (١)، (٢) في بعضهما نجد أن :

$$(2n+3)(2n-1)x^2P_{n+1}P_{n-1} = n(n+2)P_nP_{n+2} + n(n+1)P_n^2 + \\ + (n-1)(n+2)P_{n+2}P_{n-2} + (n^2-1)P_nP_{n-2}$$

بإجراء التكامل على الفترة $[-1,1]$ واستخدام قاعدة التعامد نجد أن :

$$(2n+3)(2n-1)\int_{-1}^{1} x^2P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

ومن ثم نحصل على :

$$\int_{-1}^{1} x^2P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx = \frac{2n(n+1)}{(4n^2-1)(2n+3)}$$

وعندما $n=1$ ، نجد أن :

$$\text{الطرف الأيسر} = \int_{-1}^{1} x^2 P_2 P_0 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(3x^2-1)dx = \int_{0}^{1}[3x^4 - x^2]dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 P_2 P_0 dx = \left[3\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{2\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 1} = \frac{4}{15}$$

(٣,٥) "دالة لجندر المساعدة وعلاقة التعامد لها"

يضم هذا الجزء دراسة دالة لجندر المساعدة وعلاقة التعامد والعلاقات التكرارية لها ومعادلة لجندر من النوع الثاني ، ونبدأ بما يلي :

مبرهنة(٦)

إذا كان $z(x)$ حلاً لمعادلة لجندر

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \qquad (٣,٥٥)$$

فإن

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m z}{dx^m}$$

تكون حلاً للمعادلة :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}y = 0 \quad (٣,٥٦)$$

البرهان

نلحظ أن الحل المطلوب به مشتقة من الرتبة m. وعليه نلقي الضوء على نظرية ليبنز للمشتقة النونية

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + \cdots + u^{(0)}v^{(n)} \quad (٣.٥٧)$$

حيث إن ما بين الأقواس يقصد به المشتقة التفاضلية للدالة. وبالرجوع مرة أخرى إلى المبرهنة المطلوب إثباتها، وحيث إن z حل للمعادلة (٣.٥٥) فإن :

$$(1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + n(n+1)z = 0 \quad (٣.٥٨)$$

بإجراء التفاضل من الرتبة m على المعادلة (٣.٥٨)

$$\frac{d^m}{dx^m}\left\{(1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2}\right\} - 2\frac{d^m}{dx^m}\left\{x\frac{dz}{dx}\right\} + n(n+1)\frac{d^m z}{dx^m} = 0 \quad (٣.٥٩)$$

طبق نظرية ليبنز :

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}} + \frac{m}{1!}(-2x)\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} + \frac{m(m+1)}{2!}(-2)\frac{d^m z}{dx^m} - 2\left\{x\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} + m\frac{d^m z}{dx^m}\right\} + n(n+1)\frac{d^m z}{dx^m} = 0$$

نجد أن :

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}z}{dx^{m+2}} - 2x(m+1)\frac{d^{m+1}z}{dx^{m+1}} + \{n(n+1) - m(m+1)\}\frac{d^m z}{dx^m} = 0 \quad (٣.٦٠)$$

فإذا فرضنا أن $z_1 = \frac{d^m z}{dx^m}$ فإن المعادلة (٣.٦٠) تصبح على الشكل :

$$(1-x^2)\frac{d^2 z_1}{dx^2} - 2x(m+1)\frac{dz_1}{dx} + \{n(n+1) - m(m+1)\}z_1 = 0 \quad (٣.٦١)$$

ولتحقيق المطلوب نضرب z_1 في المقدار $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ فنحصل على ما يلي :

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}} z_1 = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m z}{dx^m}$$

وإذا فرضنا أن $z_2 = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} z_1$ ، نجد أن :

$$z_1 = \frac{d^m z}{dx^m} = (1-x^2)^{\frac{-m}{2}} z_2 \tag{٣,٦٢}$$

ومن المعادلتين (٣,٦١)، (٣,٦٢) نحصل على الآتي :

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left\{(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} z_2\right\} - 2(m+1)x\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} z_2\right\} \tag{٣,٦٣}$$
$$+\{n(n+1)-m(m+1)\}(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} z_2 = 0$$

وعلى الدارس أن يلحظ المشتقات الآتية :

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} z_2\right\} = \left\{(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} \frac{dz_2}{dx} + mx(1-x^2)^{\frac{-m}{2}-1} z_2\right\}, \tag{١}$$

وأيضاً

$$\frac{d^2}{dx^2}\left\{(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} z_2\right\} = (1-x^2)^{\frac{-m}{2}} \frac{d^2 z_2}{dx^2} + 2mx(1-x^2)^{\frac{-m}{2}-1} \frac{dz_2}{dx} \tag{٢}$$
$$+ m(1-x^2)^{\frac{-m}{2}-1} z_2 + m(m+2)x^2(1-x^2)^{\frac{-m}{2}-2} z_2$$

بالتعويض من (٢)، (١) في المعادلة (٣,٦٣) نجد أن :

$$(1-x^2)^{\frac{-m}{2}+1} \frac{d^2 z_2}{dx^2} + 2mx(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} \frac{dz_2}{dx} + m(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} z_2$$
$$+ m(m+2)x^2(1-x^2)^{\frac{-m}{2}-1} z_2 - 2(m+1)x(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} \frac{dz_2}{dx}$$
$$-2m(m+1)x^2(1-x^2)^{\frac{-m}{2}-1} z_2 + \{n(n+1)-m(m+1)\}(1-x^2)^{\frac{-m}{2}} z_2 = 0$$

بالقسمة على $(1-x^2)^{\frac{-m}{2}}$ وتجميع الحدود نحصل على :

$$(1-x^2)\frac{d^2 z_2}{dx^2} + \{2mx - 2(m+1)x\}\frac{dz_2}{dx} + \left\{m + \frac{m(m+2)}{1-x^2}x^2\right.$$
$$\left.\frac{-2(m+1)mx^2}{1-x^2} + n(n+1) - m(m+1)\right\} z_2 = 0$$

بالاختصار نحصل على المعادلة :

$$(1-x^2)\frac{d^2 z_2}{dx^2}-2x\frac{dz_2}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}z_2=0 \quad (٣.٦٤)$$

وعليه نجد أن z_2 تحقق معادلة لجندر فيكون المطلوب قد ثبت.

وعلى القارئ ملاحظة الدالة المساعدة الآتية :

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \quad (٣.٦٥)$$

والتي يطلق عليها دالة لجندر المساعدة. ويمكن للدارس برهنة هذه العلاقة :

$$P_n^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x) \quad (٣.٦٦)$$

وعند وضع $m=0$ في المعادلة (٣.٦٥) فإننا نحصل على $P_n^0(x)=P_n(x)$ وكذلك إذا كانت $m>n$ فإن $P_n^m(x)=0$.

- علاقة التعامد لدالة لجندر المساعدة

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(x)P_k^m(x)dx=\frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\delta_{nk}, \qquad \delta_{nk}=\begin{cases}1 & n=k\\ 0 & n\neq k\end{cases} \quad (٣.٦٧)$$

يمكن للقارئ الاستفادة من الطريقة المستخدمة في علاقة التعامد لدالة لجندر عندما $n\neq k$ ولعدم التكرار سنلجأ فقط إلى إثبات صحة العلاقة لما $n=k$ وعليه باستخدام المعادلة (٣.٦٥) نجد أن :

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^m\left\{\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right\}\left\{\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right\}dx \quad (٣.٦٨)$$

تكامل (٣.٦٨) يمكن أن يتم التجزيء بأخذ :

$$u=(1-x^2)^m\left\{\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right\} \qquad ,\left\{\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right\}dx=dv$$

وعليه نجد أن :

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_n^m(x)\right\}^2 dx = \left[(1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)\right]_{-1}^{1}$$
$$-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)\cdot\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right\}dx$$

ونلحظ تلاشي الجزء الأول من الطرف الأيمن ، وحينئذ نحصل على

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_n^m(x)\right\}^2 dx = -\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)\cdot\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right\}dx \quad (٣.٦٩)$$

وحيث إن المعادلة (٣.٦١) يمكن كتابتها كالآتي :

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_n(x)-2(m+1)x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_n(x)$$
$$+\left\{n(n+1)-m(m+1)\right\}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)=0$$

بتحريك كل m بالمقدار $(m-1)$ نجد أن :

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_n(x)-2mx\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)+\left\{n(n+1)-m(m-1)\right\}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)=0$$

بضرب المعادلة الأخيرة في المقدار $(1-x^2)^{m-1}$ نجد أن :

$$(1-x^2)^m\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_n(x)-2mx(1-x^2)^{m-1}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$
$$=\left\{m(m-1)-n(n+1)\right\}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة :

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right\}=\left\{m(m-1)-n(n+1)\right\}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)$$

باستخدام النتيجة الأخيرة في المعادلة (٣.٦٩) نجد أن :

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2 dx = (n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m-1}\left\{\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)\right\}^2 dx$$

باستخدام العلاقة (٣،٦٥) والتعويض عن كل m بالمقدار $m-1$ ، حيث

$$P_n^{m-1}(x) = (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P_n(x)$$

فنحصل على الآتي:

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2 dx = (n+m)(n-m+1)\int_{-1}^{1}\{P_n^{m-1}(x)\}^2 dx \qquad (٣،٧٠)$$

باستخدام المعادلة (٣،٧٠) كعلاقة تكرارية نحصل على الآتي:

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2 dx = (n+m)(n-m+1)(n+m-1)(n-m+2)\int_{-1}^{1}\{P_n^{m-2}(x)\}^2 dx$$

وهكذا حتى نصل إلى :

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2 dx = (n+m)(n+m-1)(n+m-2)\cdots(n+1)n(n-1)(n-2)$$

$$\cdots(n-m+2)(n-m+1)\int_{-1}^{1}\{P_n^0(x)\}^2 dx$$

وعليه نحصل على :

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2 dx = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\cdot\frac{2}{2n+1}$$

وهو المطلوب إثباته.

عند دراسة الحالة $m<0$ ، نفرض أن $m=-k$ على سبيل المثال فنحصل على :

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2 dx = \int_{-1}^{1}\{P_n^{-k}(x)\}^2 dx$$

باستخدام المعادلة (٣،٦٦) نجد أن :

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(x)\}^2 dx = \int_{-1}^{1}\left\{(-1)^n\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right\}^2 \{P_n^k(x)\}^2 dx$$

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_n^m(x)\right\}^2 dx = \left\{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right\}^2 \int_{-1}^{1}\left\{P_n^k(x)\right\}^2 dx$$

$$= \left\{\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\right\}^2 \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \cdot \frac{2}{2n+1}$$

بالاختصار نحصل على العلاقة :

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_n^m(x)\right\}^2 dx = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \cdot \frac{2}{2n+1}$$

وهي ذات العلاقة التي تم إثباتها.

- **علاقات تكرارية لدالة لجندر المساعدة**

مبرهنة(٧)

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}} P_n^m(x) + \{n(n+1) - m(m-1)\}P_n^{m-1}(x) = 0 \quad (٣,٧١)$$

البرهان

من معادلة لجندر =

$$(1-x^2)\frac{d^2 z}{dx^2} - 2x\frac{dz}{dx} + n(n+1)z = 0$$

وبإجراء التفاضل m من المرات نحصل على :

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2} z}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x\frac{d^{m+1} z}{dx^{m+1}} + \{n(n+1) - m(m+1)\}\frac{d^m z}{dx^m} = 0$$

ثم نضع :

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(x) \quad (٣,٧٢)$$

لنحصل على العلاقة :

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} P_n^{(m)}(x) - 2(m+1)x\frac{d}{dx} P_n^{(m)}(x) + \{n(n+1) - m(m+1)\}P_n^{(m)}(x) = 0$$

والتي قد تكتب على الصورة :

$$(1-x^2)P_n^{(m+2)}(x)-2(m+1)xP_n^{(m+1)}(x)+\{n(n+1)-m(m+1)\}P_n^{(m)}(x)=0$$

بضرب العلاقة الأخيرة في المقدار $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ واستخدام المعادلة (٣.٧٢) نحصل على:

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}+1}P_n^{(m+2)}(x)-2(m+1)x\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_n^{(m+1)}(x)$$
$$+\{n(n+1)-m(m+1)\}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_n^{(m)}(x)=0$$

$$P_n^{(m+2)}(x)-\frac{2(m+1)x}{\sqrt{1-x^2}}P_n^{(m+1)}(x)+\{n(n+1)-m(m+1)\}P_n^{(m)}(x)=0$$

بالتعويض عن كل m بالمقدار $(m-1)$ نحصل على العلاقة المطلوبة.

مبرهنة(٨)

$$(2n+1)xP_n^m(x)=(n+m)P_{n-1}^m(x)+(n-m+1)P_{n+1}^m(x) \quad (٣.٧٣)$$

البرهان

هذه العلاقة تربط بين قوى كثيرات الحدود ونفس رتبتها ، وعليه نستخدم العلاقة

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-2}(x)=0 \quad (٣.٧٤)$$

وحين نطبق نظرية ليبنز على المعادلة (٣.٧٤) بالتفاضل m من المرات نجد أن

$$(n+1)P_{n+1}^{(m)}(x)-(2n+1)\{xP_n^{(m)}(x)+mP_n^{(m-1)}(x)\}+nP_{n-1}^{(m)}(x)=0 \quad (٣.٧٥)$$

أيضاً باستخدام العلاقة

$$P_{n+1}^{(1)}(x)-P_{n-1}^{(1)}(x)=(2n+1)P_n(x), \quad P_n^{(1)}(x)=\frac{dP_n}{dx} \quad (٣.٧٦)$$

وتفاضلها $(m-1)$ من المرات نجد أن :

$$P_{n+1}^{(m)}(x)-P_{n-1}^{(m)}(x)=(2n+1)P_n^{(m-1)}(x) \quad (٣.٧٧)$$

باستخدام المعادلة (٣.٧٧) في المعادلة (٣.٧٥) نحصل على الآتي :

$$(n+1)P_{n+1}^{(m)}(x)-(2n+1)xP_n^{(m)}(x)-m\{P_{n+1}^{(m)}(x)-P_{n-1}^{(m)}(x)\}+nP_{n-1}^{(m)}(x)=0$$

بضرب المعادلة الأخيرة في المقدار $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ ثم استخدام المعادلة (٣،٧٢) مع تجميع الحدود نحصل على الآتي:

$$(n-m+1)P_{n+1}^{(m)}(x)-(2n+1)xP_n^{(m)}(x)+(n+m)P_{n-1}^{(m)}(x)=0$$

وهو المطلوب.

مبرهنة(٩)

$$\sqrt{1-x^2}\,P_n^{(m)}(x)=\frac{1}{2n+1}\{P_{n+1}^{(m+1)}(x)-P_{n-1}^{(m+1)}(x)\} \qquad (٣،٧٨)$$

البرهان

يلحظ الدارس أن هناك تشابها بين العلاقتين (٣،٧٨)، (٣،٧٧)، لذلك نضرب المعادلة (٣،٧٧) في المقدار $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ ثم نستعمل العلاقة (٣،٧٢) فنحصل على الآتي:

$$(n-m+1)P_{n+1}^{(m)}(x)-(2n+1)xP_n^{(m)}(x)+(n+m)P_{n-1}^{(m)}(x)=0$$

$$\sqrt{1-x^2}\,P_n^{(m)}(x)=\frac{1}{2n+1}\{P_{n+1}^{(m+1)}(x)-P_{n-1}^{(m+1)}(x)\}$$

وهو المطلوب.

- **دالة لجندر من النوع الثاني**

فيما سبق درسنا وجود حل للمعادلة التفاضلية (٣،١) باستخدام دالة لجندر في الفترة $-1\le x\le 1$ ولكن في كثير من المسائل الطبيعية والهندسية نحتاج إلى إيجاد حل عند $|x|>1$ وبالطبع فإن أحد الحلول هو $P_n(x)$ على حين الحل الثاني في هذه الحالة نطلق عليه دالة لجندر من النوع الثاني (ويتبقى هذا الحل لانهائي عند $x=\pm1$)

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(2n-4r-1)}{(2r+1)(n-r)}P_{n-2r-1}(x),\qquad (n\geq 1)$$

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\qquad (٣.٧٩)$$

حيث

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]=\begin{cases}\frac{n-1}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عدداً فردياً}\\ \frac{n-2}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عدداً زوجياً}\end{cases}\qquad (٣.٨٠)$$

ومن أهم خواص هذه الدالة الآتي :

$$(1)\quad \frac{1}{x-y}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)Q_n(y)\ ,\quad x>1\ ,|y|\leq 1\qquad (٣.٨١)$$

$$(2)\quad Q_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(y)}{x-y}dy\qquad (٣.٨٢)$$

$$(3)\quad Q_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x)\qquad (٣.٨٣)$$

مثال(٦)

عين قيم دوال لجندر المساعدة الآتية :

(أ) $P_2^1(x)$ ، (ب) $p_3^2(x)$ ، (ج) $p_2^3(x)$

الحل

(أ) $$P_2^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}P_2(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\frac{1}{2}(3x^2-1)=3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

(ب) $$P_3^2(x)=(1-x^2)^{\frac{2}{2}}\frac{d^2}{dx^2}P_3(x)=(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{5x^3-3x}{2}\right)=15x-15x^3$$

(ج) $$P_2^3(x)=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^3}{dx^3}P_2(x)=0$$

مثال(٧)

أثبت أن $P_3^2(x)$ تمثل حلاً لمعادلة لجندر المساعدة

الإثبات بما أن معادلة لجندر المساعدة هي :

$$(1-x^2)y''-2xy'+[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0$$

وحيث إن $m=2, n=3$ ، $P_3^2(x)=15x-15x^3,$

$$\text{الطرف الأيسر} =(1-x^2)y''-2xy'+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y$$

$$=(1-x^2)(-90x)-2x(15-45x^2)+\left[12-\frac{4}{1-x^2}\right]\left[15x-15x^3\right]=0$$

وعليه يتحقق المطلوب .

(٣،٦) "تطبيقات على كثيرات حدود لجندر"

يضم هذا الجزء ثلاثة تطبيقات هامة وهي :

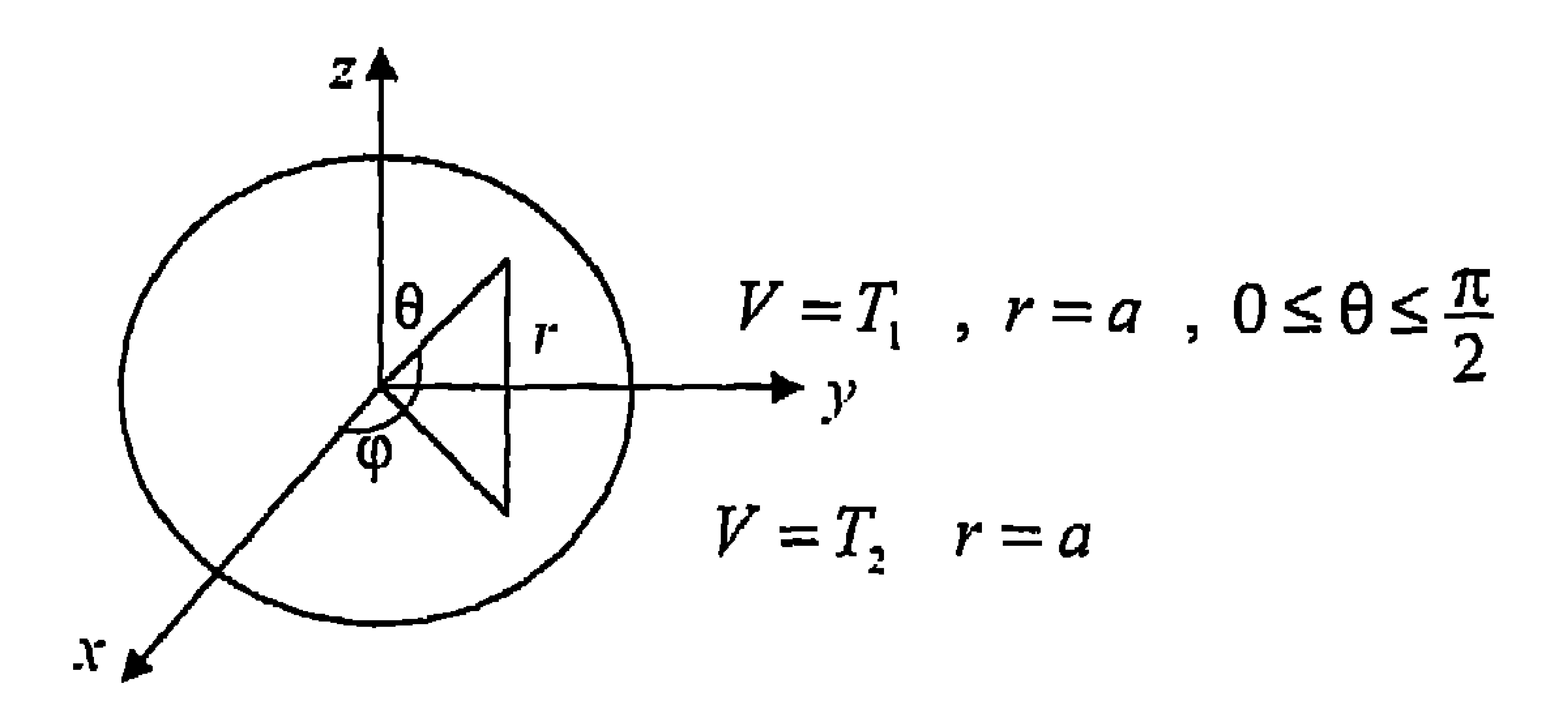
التطبيق الأول

عين دالة الجهد للحرارة الكامنة داخل كرة مصمتة نصف قطرها a عندما يكون نصف سطحها العلوي في وضع حرارة ابتدائي قدره T_1 ونصف سطحها السفلي T_2.

الحل

يقصد بالحرارة الكامنة داخل الكرة هي الحرارة التي تؤثر في الموضع فقط ، وتكون ساكنة وكامنة بالنسبة للزمن ، وعلى ذلك فهي تحقق معادلة لابلاس :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (٣،٨٤)$$



بكتابة المعادلة (٣.٨٤) في الصورة الكروية حيث $V = V(r,\theta,\varphi)$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (٣.٨٥)$$

وتماثل V لا يعتمد على φ لذلك نجد أن $\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0$ وعليه نحصل على المعادلة

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}) = 0 \qquad (٣.٨٦)$$

وعلى ذلك تكون المسألة قد تحولت إلى إيجاد الحل العام للمعادلة (٣.٨٦) تحت الشروط :

$$V = T_1 \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\quad r = a$$

$$V = T_2 \qquad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi,\quad r = a$$

ولحل المعادلة (٣.٨٦) نفرض أن :

$$V(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \qquad (٣.٨٧)$$

ومن (٣.٨٧) و (٣.٨٦) نجد أن :

$$\Theta\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{R}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) = 0$$

بالقسمة على ΘR نجد أن :

$$\frac{-1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) = \frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) = n(n+1) \quad (٣.٨٨)$$

حيث إن ثابت التناسب فرض على شكل $n(n+1)$ ، وعليه نجد أن :

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) = n(n+1)$$

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) - n(n+1)R = 0$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (٣.٨٩)$$

المعادلة (٣.٨٩) تمثل معادلة أويلر ، ولحلها نستخدم التعويض $r = e^t$ فنجد أن :

$$r\frac{d}{dr} = \frac{d}{dt} \qquad \text{وعليه} \qquad \frac{d}{dr} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{dt}{dr} \quad (أ)$$

كما أن

$$\frac{d^2}{dr^2} = \frac{d}{dr}(\frac{1}{r}\frac{d}{dt}) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt} + \frac{1}{r}\frac{d^2}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dt} = \frac{1}{r^2}(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{d}{dr})$$

وعليه فإن :

$$r^2\frac{d^2}{dr^2} = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dr} \quad (ب)$$

ومن المعادلتين (أ) ، (ب) والمعادلة (٣.٨٩) نحصل على الآتي :

$$[D(D-1) + 2D - n(n+1)]R = 0 \ , \quad \frac{d}{dt} = D$$

$$[D^2 + D - n(n+1)]R = 0$$

$$[(D-n)\cdot(D+n+1)]\ R = 0 \quad (ج)$$

ومعادلة الجذور المميزة للمعادلة (ج) تعطي الجذرين $n,-(n+1)$ وعليه يكون الحل بدلالة t على الصورة $R = Ae^{nt} + Be^{-(n+1)t}$ ، وبدلالة r يأخذ الوضع :

$$R = Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \tag{٣.٩٠}$$

والآن سنولي الاهتمام لدراسة المعادلة لـ θ و Θ

$$\frac{1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta}(\sin\theta \cdot \frac{d\Theta}{d\theta}) = -n(n+1)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}(\sin\theta \cdot \frac{d\Theta}{d\theta}) + n(n+1)\Theta = 0 \tag{٣.٩١}$$

باختيار $u = \cos\theta$ فيكون:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d}{du}$$

$$\frac{-1}{\sin\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} = \frac{d}{du}$$

1

$\sqrt{1+u^2}$

θ

u

وعليه تصبح المعادلة (٣.٩١) على الصورة :

$$-\frac{d}{du}(-\sin^2\theta \cdot \frac{d\Theta}{du}) + n(n+1)\Theta = 0$$

$$\frac{d}{du}\{(1-u^2)\frac{d\Theta}{du}\} + n(n+1)\Theta = 0$$

$$(1-u^2)\frac{d\Theta}{du} - 2u\frac{d\Theta}{du} + n(n+1)\Theta = 0 \tag{٣.٩٢}$$

المعادلة (٣.٩٢) تمثل معادلة لجندر التفاضلية ، وعندما تكون قيمة n عددا صحيحا موجبا فإن حل المعادلة (٣.٩٢) يكون على الصورة:

$$\Theta(\theta) = P_n(u) = P_n(\cos\theta)$$

وتكون دالة الجهد على الصورة :

$$V = \{A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\} P_n(\cos\theta) \tag{٣.٩٣}$$

ومن العلاقة (٣.٩٣) نرى أنه عند $r = 0$ فإن الجهد عند المركز يصبح لانهائي لذلك نضع $B_1 = 0$ وعليه تتحول المعادلة إلى الوضع الآتي:

$$V = A_1 r^n P_n(\cos\theta) \qquad (٣.٩٤)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة : $V = A(\frac{r}{a})^n P_n(\cos\theta)$

ونظراً لوجود عدد لانهائي لقيم n فإن :

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\frac{r}{a})^n P_n(\cos\theta) \qquad (٣.٩٥)$$

ولتعيين الثابت A_n من المعالة (٣.٩٥) نضع $r = a$

$$V(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) \qquad (٣.٩٦)$$

بتطبيق شرط التعامد لدالة لجندر نجد أن :

$$\int_{-1}^{1} V(a,\theta) P_m(u)du = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-1}^{1} P_n(u) P_m(u)du$$

وعليه

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} V(a,\theta) P_n(u)du \quad , \quad u = \cos\theta \qquad (٣.٩٧)$$

ومن الشروط الابتدائية نجد أن :

$$A_n = \frac{2n+1}{2} [\int_{-1}^{0} T_1 P_n(u)du + \int_{0}^{1} T_2 P_n(u)du]$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2} [T_1 \int_{-1}^{0} P_n(u)du + T_2 \int_{0}^{1} P_n(u)du] \qquad (٣.٩٨)$$

المعادلة (٣.٩٨) توضح لنا كيفية تعيين عدد لانهائي من الثوابت المتوقف على قيمة n. وسنختار ست قيم للمقدار n :

$$P_0 = 1 , \quad P_1(x) = x \quad , \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad , \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) \qquad (٣.٩٩)$$

وبالتكامل نحصل على :

$$V(r,\theta)=\frac{1}{2}(T_1+T_2)+\frac{3}{4}(T_1-T_2)(\frac{r}{a})P_1(\cos\theta)+ +\frac{7}{16}(T_2-T_1)(\frac{r}{a})^3P_3(\cos\theta)+\frac{11}{32}(T_2-T_1)(\frac{r}{a})^5P_5(\cos\theta)+\cdots \qquad (٣.١٠٠)$$

التطبيق الثاني

التطبيق لموصلين حراريين نصف كرويين (نصف قطرهما a) اتصلا ببعضهما من خلال المستوى الخارجي لهما مع عزل الكهرباء الانتقالية عن بعضهما ، فإذا كان الجهد للموصل الأول على السطح V_1 والثاني V_2 فما هو الجهد في الفضاء الموجود.

هذا النوع من المسائل يتحول إلى الوضع الآتي :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta})=0 \qquad (٣.١٠١)$$

تحت الشروط $\quad V(a,\theta)=V_1 \qquad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$V(a,\theta)=V_2 \qquad \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi \qquad (٣.١٠٢)$$

مما سبق دراسته من التطبيق الأول أثبتنا أن دالة الجهد تأخذ الوضع :

$$V(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}})P_n(u)\ , \qquad u=\cos\theta \qquad (٣.١٠٣)$$

- داخل الكرة: لتجنب النقط الشاذة فإننا في المعادلة (٣.١٠٣) نأخذ $B_n=0$

وعليه نحصل على المعادلة :

$$V(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\frac{r}{a})^n P_n(u) \qquad 0\le r\le a \qquad (٣.١٠٤)$$

وعند $r=a$ نجد أن: $\quad V(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n(u)$

وتعين قيمة A_n باستخدام شرط التعامد لدالة لجندر فنحصل على :

$$A_n = (\frac{2n+1}{2})\int_{-1}^{1} V(a,\theta)P_n(u)du$$

i.e

$$A_n = (\frac{2n+1}{2})[V_2\int_{-1}^{0} P_n(u)du + V_1\int_{0}^{1} P_n(u)du]$$

وعليه وبعد حساب قيمة A_n المطلوبة يكون الجهد الخاص بالمعادلة (٣،١٠٤) قد تم معرفته.

• خارج الكرة : وعندما تكون r أكبر ما يمكن خارج الكرة يجب أن ينعدم الجهد أو يصبح كمية محدودة، من أجل ذلك فإنه المعادلة (٣،١٠٣) فإننا نأخذ $A_n = 0$ فتتحول المعادلة إلى الوضع الآتي :

$$V(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\frac{a}{r})^{n+1}P_n(u) \qquad r \geq a \qquad (٣،١٠٥)$$

عند $r = a$ نجد أن : $$V(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(u)$$

وعليه يكون : $$B_n = (\frac{2n+1}{2})[V_2\int_{-1}^{0} P_n(u)du + V_1\int_{0}^{1} P_n(u)du]$$

• **عند النقطة المتماثلة حول محور التماثل بالنسبة للجسم يكون الجهد كالآتي:**

$$V(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\}P_n(\cos\theta)$$

بوضع $\theta = 0$ (النقطة على محور التماثل).

$$V(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\}$$

وعليه يمكن حل المعادلة $V(r,\theta)$ عند أي نقطة على محور التماثل ثم حساب مفكوك الدالة حول $r = 0$ نجد أنه :

$$V(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\{A'_n r^n+\frac{B'_n}{r^{n+1}}\}$$

وهذا يثبت أن العلاقة قائمة لجميع نقاط التماثل حول المحور.

- **التطبيق الثالث**

ويعتبر هذا التطبيق ذا أهمية عظمى عند إعطائه الشروط الخاصة به ، وتزداد أهمية هذا التطبيق عند حل معادلة شرودنجر في ميكانيكا الكم ، وعند حل معادلات الموائع ، وكذلك الموصلات الكهربائية الكروية ، ودراسة معادلات الحرارة والموجة والتطبيق يتمثل في حالة معادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية $V(r,\theta,\varphi)$ حيث $0\le r\le a,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\ ,\quad 0\le\theta\le\pi$.

ومعادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية تأخذ الوضع الآتي :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0 \quad (٣،١٠٦)$$

بفصل المتغيرات كالآتي :

$$V(r,\theta,\varphi)=R(r)W(\theta,\varphi)$$

نجد أن :

$$W(\theta,\varphi)\frac{d}{dr}(r^2R(r))+\frac{R(r)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial W}{\partial\theta})+\frac{R}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}=0$$

بالقسمة على RW نجد أن :

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2R(r))=\frac{-1}{W}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial W}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right]=const\cdot \quad (٣،١٠٧)$$

وهذا الثابت سوف نختاره $n(n+1)$ وعليه نجد أن :

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2R(r))=n(n+1)$$

أو

$$r^2R''(r)+2rR'-n(n+1)R=0 \tag{٣,١٠٨}$$

وكما سبق فإن هذه المعادلة تمثل معادلة أويلر، وحلها معطى في التطبيق الأول كالآتي :

$$R(r)=(Ar^n+\frac{B^n}{r^{n+1}}) \tag{٣,١٠٩}$$

بالرجوع مرة أخرى إلى المعادلة (٣,١٠٧) نجد أن :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial W}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+n(n+1)W=0 \tag{٣,١١٠}$$

ولحل هذه المعادلة نفرض الآتي :

$$W(\theta,\varphi)=U(\theta)\psi(\varphi) \tag{٣,١١١}$$

باستخدام المعادلة (٣,١١١) في المعادلة (٣,١١٠) نجد أن :

$$\frac{\psi}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dU}{d\theta})+\frac{U}{\sin^2\theta}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+n(n+1)U\psi=0$$

بقسمة المعادلة الأخيرة على الدالة $U(\theta)\psi(\varphi)$ ثم الضرب في $\sin^2\theta$ نجد أن

$$\frac{\sin\theta}{U}\cdot\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dU}{d\theta})+\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}+n(n+1)\sin^2\theta=0$$

وهذه المعادلة تكتب على الشكل :

$$\frac{\sin\theta}{U}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dU}{d\theta})+n(n+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}=m^2 \tag{٣,١١٢}$$

وذلك الفرض بعدم اعتماد الدالة φ على الدالة θ وعليه نحصل على الآتي :

$$-\frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}=m^2$$

أو

$$\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}=-m^2\psi \tag{٣,١١٣}$$

وهي معادلة توافقية بسيطة حلها العام كالآتي :

$$\psi(\varphi) = (Ce^{im\varphi} + De^{-im\varphi}) \quad (٣.١١٤)$$

أيضاً المعادلة (٣.١١٢) تكتب على الشكل الآتي :

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{dU}{d\theta}) + \{n(n+1)\sin^2\theta - m^2\}U = 0$$

والتي يمكن أن تهذب في الشكل الآتي :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{dU}{d\theta}) + \{n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\}U = 0 \quad (٣.١١٥)$$

المعادلة (٣.١١٥) تحل بالتعويض $u = \cos\theta$ كما سبق في التطبيق الأول فنحصل على الآتي :

$$\frac{d}{du}\left\{(1-u^2)\frac{dU(u)}{du}\right\} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right\}U(u) = 0 \quad (٣.١١٦)$$

المعادلة (٣.١١٦) تمثل معادلة لجندر المساعدة والتي حلها $P_n^m(\cos\theta)$ عند $\theta = 0$ ، $P_n^{-m}(\cos\theta)$ عند $\theta = \pi$ والمناظر لهما الوضعان $u = 1$, $u = -1$.

ولوجود قيم m والتي تعتبر تفاضلية فإن الحل العام

$$W(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n}[C^{(m)}e^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta) + D^{(m)}e^{-im\varphi}P_n^{-m}(\cos\theta)] \quad (٣.١١٧)$$

فإذا فرضنا أن :

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^m(\cos\theta),$$
$$Y_n^{-m}(\theta,\varphi) = e^{-im\varphi}P_n^m(\cos\theta) \quad (٣.١١٨)$$

فإن المعادلة (٣.١١٧) تكتب على الشكل الآتي :

$$W(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n}[C^{(m)}Y_n^m(\theta,\varphi) + D^{(m)}Y_n^{-m}(\theta,\varphi)] \quad (٣.١١٩)$$

ويصبح الحل العام لمعادلة لابلاس في الصورة الكروية كالآتي :

$$V(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}[A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}][C^{(m)}Y_n^m(\theta,\varphi)+D^{(m)}Y_n^{-m}(\theta,\varphi)] \quad (٣.١٢٠)$$

ويمكن بالشروط المعطاة تعيين قيمة الثوابت.

تمـــارين

١- إذا كان $h(1-2hx+h^2)^{\frac{-3}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}h^n P_n'(x)$ ، فأثبت أن :

(أ) $P_n'(-1)=(-1)^{n-1}\frac{n}{2}(n+1)$ ، (ب) $P_n'(x)=\frac{n(n+1)}{2}$

٢- أثبت أن $y=P_n(\cos\theta)$ تحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}+\cot\theta\cdot\frac{dy}{d\theta}+n(n+1)y=0$$

٣- أثبت أن $P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

٤- أثبت أن

(أ) $P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(1+3\cos 2\theta)$

(ب) $P_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(3\cos\theta+5\cos 3\theta)$

(ج) $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)=\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}$

٥- احسب الآتي :

(أ) $\int_{-1}^{1}P_n(x)dx$ ، (ب) $\int_{-1}^{1}xP_n(x)dx$

٦- أثبت أن $\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_{n+1}(x)dx=\frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$

٧- أثبت أن $\int_{-1}^{1} x^2 P_n^2(x)dx = \frac{8n^3+12n^2+2}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)}$

٨- أوجد مفكوك $x^4 - 3x^2 + x$ على شكل كثيرة حدود لجندر.

٩- مثّل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < 0 \\ 2x+1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

على شكل كثيرة حدود لجندر

١٠- اثبت الآتي :

(أ) $(2n+1)(1-x^2)P_n'(x) = n(n+1)\{P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)\}$

(ب) $\int_{-1}^{1} (x^2-1)P_{n+1}(x)P_n'(x)dx = \frac{2n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$

حيث $P_n(x)$ كثيرات حدود لجند.

الفصل الرابع

كثيرات حدود شبيشف

Chebyshev Polynomials

يضم هذا الفصل بندين، ندرس فيهما دالة شبيشف والصور المختلفة لها والدالة المولدة وخواصها ، إضافة إلى علاقات التعامد والعلاقات التكرارية وما ينتج منها.

(٤,١) دالة شبيشف والدالة المولدة

تعرف كثيرات حدود شبيشف من النوع الأول $T_n(x)$ كالآتي :

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x) \qquad (n \geq 0),\ |x| \leq 1 \qquad (٤,١)$$

وكثيرات حدود شبيشف من النوع الثاني $U_n(x)$ كالآتي :

$$U_n(x) = \sin(n\cos^{-1}x) \qquad (n \geq 0) \qquad (٤,٢)$$

والتي قد تكتب أيضاً على الصورة :

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}x]}{\sin\cos^{-1}x}$$

ويمكن تعريف $T_n(x)$ في الصورة المركبة كالآتي :

افرض أن $x = \cos\theta$ نجد أن المعادلة (٤.١) تصبح كالآتي :

$$T_n(x) = \cos(n\theta)$$
$$= \frac{1}{2}\left[e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\right]$$

وعليه نجد أن :

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\right] \quad (٤.٣)$$

بالمثل يمكن كتابة $U_n(x)$ كالآتي :

$$U_n(x) = \sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left[e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right]$$

$$U_n(x) = \frac{1}{2i}\left[\{x + i\sqrt{1-x^2}\}^n + \{x - i\sqrt{1-x^2}\}^n\right] \quad (٤.٤)$$

المعادلتان (٤.٤)، (٤.٣) تمثلان إحدى الصور لدالتي كثيرة حدود شبيشف.

مبرهنة(١)

"صور أخرى لكثيرات حدود شبيشف"

$$\text{(a)}\ T_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{n!(1-x^2)^r}{(2r)!(n-2r)!} x^{n-2r} \quad (٤.٥)$$

$$\text{(b)}\ U_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]} (-1)^r \frac{n!(1-x^2)^{r+\frac{1}{2}}}{(2r+1)!(n-2r-1)!} x^{n-2r-1} \quad (٤.٦)$$

حيث $[\nu]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي ν .

البرهان

من العلاقة (٤،٣)، نجد أن :

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left[\{x+i\sqrt{1-x^2}\}^n+\{x-i\sqrt{1-x^2}\}^n\right]$$

وبتطبيق مبرهنة ذي الحدين :

$$(u+v)^n=u^n+\frac{n}{1!}u^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2+\cdots+v^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n u^{n-r}v^r$$

نجد أن :

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left[\sum_{r=0}^{n}C_r^n x^{n-r}\{i\sqrt{1-x^2}\}^r+\sum_{r=0}^{n}C_r^n x^{n-r}\{-i\sqrt{1-x^2}\}^r\right]$$

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left[\sum_{r=0}^{n}(i)^r C_r^n x^{n-r}\{\sqrt{1-x^2}\}^r\{(1)^r+(-1)^r\}\right]$$

وتوضح لنا المعادلة الأخيرة أنه إذا كانت r فردية فإن $(1)^r+(-1)^r=0$ أما إذا كانت r زوجية فإن :

$$T_n(x)=\sum_{r=0}^{n}(i)^r\,C_r^n x^{n-r}\,\{\sqrt{1-x^2}\}^r \qquad (٤،٧)$$

وحيث إن r زوجية إذاً $r=2s$ حيث s عدد صحيح موجب $r\le n$ وعليه يكون $s\le\frac{n}{2}$ وبالتالي فإن :

$$T_n(x)=\sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}i^{2s}C_{2s}^n x^{n-2s}(1-x^2)^s=\sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^s\cdot\frac{n!x^{n-2s}}{(n-2s)!(2s!)}\left(1-x^2\right)^s$$

وهذا يثبت العلاقة الأولى ، وبنفس الطريقة يمكن إثبات العلاقة الثانية.

العلاقتان (٤،٦)، (٤،٥) تعطيان قيم $U_n(x),T_n(x)$ عندما تأخذ n أوضاع مختلفة :

$$\begin{aligned}&T_0(x)=1,\ T_1(x)=x\ ,\quad T_2(x)=2x^2-1\ ,\qquad T_3(x)=4x^3-3x.\\&U_0(x)=0\,,\ U_1(x)=\sqrt{1-x^2}\ ,\ \ U_2(x)=2x\sqrt{1-x^2}\ ,\ \ U_3(x)=(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}\end{aligned}\qquad (٤،٨)$$

مبرهنة(٢)

الدالتان $U_n(x), T_n(x)$ تمثلان حلين مستقلين للمعادلة التفاضلية :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0 \qquad (٤.٩)$$

البرهان

لإثبات صحة المبرهنة يجب أن نثبت أن كلاً من $U_n(x), T_n(x)$ يمثل حلاً للمعادلة (٤.٩)، ولإثبات ذلك، لاحظ أن

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$$

$$\frac{dT_n(x)}{dx}=-\sin(n\cos^{-1}x)\left(\frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

وعليه نجد أن :

$$\sqrt{1-x^2}\,T_n'(x)=n\sin(n\cos^{-1}x) \qquad (٤.١٠)$$

وبتفاضل المعادلة (٤.١٠) نحصل على :

$$\sqrt{1-x^2}\,T_n''(x)-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}T_n'(x)=n\cos(n\cos^{-1}x)\cdot\frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}$$

بضرب المعادلة الأخيرة في المقدار $\sqrt{1-x^2}$ نحصل على

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0 \qquad (٤.١١)$$

بالمثل يمكن إثبات أن :

$$(1-x^2)U_n''(x)-xU_n'(x)+n^2U_n(x)=0 \qquad (٤.١٢)$$

وحيث إن $T_n(1)=1$ و $U_n(1)=0$ إذاً $U_n(x)$ و $T_n(x)$ حلان مستقلان.

مبرهنة(٣)

"الدالة المولدة"

$$\text{(a)}\ \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=T_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}t^nT_n(x),\quad -1\le x\le 1 \qquad (٤.١٣)$$

$$\text{(b)}\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(x)t^n,\quad -1\le x\le 1 \qquad (٤.١٤)$$

البرهان

لإثبات المعادلة (٤.١٣) نستخدم في الطرف الأيسر التعويض الآتي:

$$x=\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$$

فنحصل على:

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=\frac{1-t^2}{1-t(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+t^2}=\frac{1-t^2}{(1-e^{i\theta}t)(1-e^{-i\theta}t)}$$

$$=(1-t^2)\sum_{r=0}^{\infty}(e^{i\theta}t)^r\cdot\sum_{s=0}^{\infty}(e^{-i\theta}t)^s=(1-t^2)\sum_{r,s=0}^{\infty}e^{i(r-s)\theta}t^{r+s}$$

وعليه نجد أن:

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=\sum_{r,s=0}^{\infty}e^{i(r-s)\theta}t^{r+s}-\sum_{r,s=0}^{\infty}e^{i(r-s)\theta}t^{r+s+2} \qquad (٤.١٥)$$

والمطلوب الآن إيجاد معامل t^n ثم تحقيق الطرف الأيمن من العلاقة المطلوبة ولذلك سنقوم بدراسة الحالات عند $n=0$ ثم $n=1$ ثم الحالة العامة للعدد $n\ge 2$. العلاقة (٤.١٥) يمكن حساب قيمتها عند $n=0$ إذا وضعنا كلا من $r=s=0$ وعليه يكون معامل t^0 هو:

$$1=e^{i(0-0)}=T_0(x)$$

أما $n=1$ فيمكن الحصول عليها عندما $s=0,r=1$ أو $s=1,r=0$ وعليه يكون معامل t^1

$$\text{الطرف الأيمن}=e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta=2T_1(x)$$

أما إذا كان $n \geq 2$ فإننا نوجد معامل t^n عندما $n = r+s$ وهذا يعني أن $s = n-r$ في الجزء الأول على حين نأخذ $r+s+2 = n$ في الجزء الثاني فنجد أن $s = n-r-2$ وبناء على ذلك يكون معامل t^n في الطرف الأيمن :

$$\sum_{r=0}^{n} e^{i(r-(n-r))\theta} - \sum_{r=0}^{n-2} e^{i(r-(n-r-2))\theta} = e^{-in\theta}\sum_{r=0}^{n} e^{2ir\theta} - e^{-i(n-2)\theta}\sum_{r=0}^{n-2} e^{2ir\theta}$$

$$= e^{-in\theta}\sum_{r=0}^{n}\frac{e^{2ir\theta}(1-e^{2i\theta})}{1-e^{2i\theta}} - e^{-i(n-2)\theta}\sum_{r=0}^{n-2}\frac{e^{2ir\theta}(1-e^{2i\theta})}{1-e^{2i\theta}}$$

$$= e^{-in\theta}\cdot\frac{1-(e^{2i\theta})^{n+1}}{1-e^{2i\theta}} - e^{-i(n-2)\theta}\cdot\frac{1-(e^{2i\theta})^{n-1}}{1-e^{2i\theta}}$$

$$= \frac{e^{-in\theta}-e^{i(n+2)\theta}}{1-e^{2i\theta}} + \frac{e^{-i(n-2)\theta}-e^{in\theta}}{1-e^{2i\theta}}$$

$$= \frac{e^{-in\theta}(1-e^{2i\theta})}{1-e^{2i\theta}} + \frac{e^{in\theta}(1-e^{2in\theta})}{1-e^{2i\theta}}$$

$$= e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos n\theta = 2T_n(x)$$

وعليه يحصل المطلوب ، ويمكن إثبات صحة العلاقة (٤.١٤) بنفس الطريقة.

مما سبق من العلاقتين يمكن إثبات صحة العلاقات الآتية :

$$T_n(1) = 1,\quad T_n(-1) = (-1)^n,\quad T_{2n}(0) = (-1)^n,\quad T_{2n+1}(0) = 0$$

من تعريف دالة شبيشف $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x)$ نضع $x = 1$ أولاً نجد أن :

$$T_n(1) = \cos(n\cdot 0) = 1,$$

$$T_n(-1) = \cos(n\cos^{-1}(-1)) = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$T_n(0) = \cos(n\cos^{-1}0) = \cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & n \text{ عدد صحيح فردي} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ عدد صحيح زوجي} \end{cases}$$

بالمثل يمكن للدارس إثبات صحة العلاقات الآتية :

$$U_n(1) = 0,\quad U_n(-1) = 0,\quad U_{2n}(0) = 0,\quad U_{2n+1}(0) = (-1)$$

(٤,٢) "علاقات التعامد وبعض العلاقات التكرارية"

يضم هذا الجزء دراسة علاقات التعامد وبعض العلاقات التكرارية وما ينتج عنها، وتعرف علاقة التعامد في المبرهنة الآتية:

مبرهنة(٤)

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{\pi}{2} & m=n\neq 0\\ \pi & m=n=0\end{cases} \qquad (٤.١٥)$$

البرهان

أولاً نضع $m=n=0$ في العلاقة (٤.١٥) فنجد أن :

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\sin^{-1}x\right]_{-1}^{1}=\sin^{-1}1+\sin^{-1}1=\pi$$

في الحالة العامة نفرض أن $x=\cos\theta$ ، فنجد أن :

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{\pi}^{0}\frac{T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta)}{\sin\theta}\cdot(-\sin\theta d\theta)$$

$$=\int_{0}^{\pi}T_m(\cos\theta)T_n(\cos\theta)d\theta=\int_{0}^{\pi}\cos m\theta\cdot\cos n\theta d\theta$$

وعليه نحصل على :

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\cos(m+n)\theta+\cos(n-m)\theta]d\theta \qquad (٤.١٦)$$

في العلاقة (٤.١٦) ندرس الحالات الآتية :

أ) عندما $n=m\neq 0$ ، نجد أن :

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[1+\cos 2\theta]d\theta=\frac{\pi}{2}$$

ب) عندما $n\neq m$ ، نجد أن :

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)\theta}{m+n}+\frac{\sin(n-m)\theta}{n-m}\right]_0^{\pi}=0$$

مبرهنة(٥)

"علاقات تكرارية"

(أ) $T_{n+m}(x)-2T_m(x)T_n(x)+T_{|n-m|}(x)=0$ (٤.١٧)

(ب) $(1-x^2)T_n'(x)=-nxT_n(x)+nT_{n-1}(x)$ (٤.١٨)

البرهان

(أ) بوضع $x=\cos\theta$ ، يكون لدينا :

$$T_{n+m}(x)+T_{|n-m|}(x)=\cos(m+n)\theta+\cos(n-m)\theta$$
$$=2\cos m\theta\cos n\theta=2T_m(x)T_n(x)$$

وبذلك ثبتت العلاقة الأولى.

(ب) بوضع $x=\cos\theta$ ، يكون لدينا :

$$(1-x^2)T_n'(x)=(1-x^2)\frac{dT_n(x)}{dx}=(1-\cos^2\theta)\frac{d}{d(\cos\theta)}\cos n\theta$$
$$=\sin^2\theta(-\frac{1}{\sin\theta})(-n\sin n\theta)=n\sin\theta\sin n\theta$$

أما :

$$nT_{n-1}(x)-nxT_n(x)=n\cos(n-1)\theta-n\cos\theta\cos n\theta$$
$$=n\sin\theta\sin n\theta$$

وعليه فإن : $(1-x^2)T_n'(x)=-nxT_n(x)+nT_{n-1}(x)$

ملاحظة: يمكن تمثيل أي دالة على شكل كثيرة حدود شبيشف كالآتي :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nT_n(x) \qquad (٤.١٩)$$

وذلك بكتابة المعادلة (٤,١٩) كالآتي :

$$\frac{f(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

وبالتكامل مع تطبيق شرط التعامد نجد أن :

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad n\neq 0$$

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad n=0$$

وفي ما يلي بعض الاستنتاجات والأمثلة :

مثال(١)

أثبت أن :

$$T_n'(x)=nU_{n-1}(x) \tag{٤,٢٠}$$

الإثبات : بإجراء التفاضل على :

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$$

نصل إلى :

$$T_n'(x)=\frac{-\sin(n\cos^{-1}x)\cdot(-n)}{\sqrt{1-x^2}}$$

وبوضع $x=\cos\theta$ نحصل على :

$$T_n'(x)=\frac{n\sin(n\theta)}{\sin\theta}=\frac{n\sin(n\cos^{-1}x)}{\sin\cos^{-1}x}=nU_{n-1}(x)$$

مثال(٢)

أثبت صحة العلاقة :

$$\frac{T_{n+1}'(x)}{n+1}-\frac{T_{n-1}'(x)}{n-1}=2T_n(x) \tag{٤,٢١}$$

الإثبات : نجرى التفاضل :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{T_{n+1}(x)}{n+1}-\frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right]=\frac{d}{dx}\left\{\frac{\cos\left[(n+1)\cos^{-1}x\right]}{n+1}-\frac{\cos\left[(n-1)\cos^{-1}x\right]}{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{\sin\left[(n+1)\cos^{-1}x\right]-\sin\left[(n-1)\cos^{-1}x\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{\left[\sin\left(n\cos^{-1}x\right)\cdot\cos\left(\cos^{-1}x\right)+\cos\left(n\cos^{-1}x\right)\cdot\sin\left(\cos^{-1}x\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\sin\left(n\cos^{-1}x\right)\cdot\cos\left(\cos^{-1}x\right)-\cos\left(n\cos^{-1}x\right)\cdot\sin\left(\cos^{-1}x\right)\right]\right\}$$

إذاً

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{T_{n+1}(x)}{n+1}-\frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right]=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\cos^{-1}x)\cos(n\cos^{-1}x)$$
$$=\frac{2T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\cos^{-1}x)$$

وبوضع $x=\cos\theta$ نجد أن $\sin(\cos^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$ ، وعليه فإن :

$$\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}-\frac{T_{n-1}(x)}{n-1}=2T_n(x)$$

مثال(٣)

أثبت أن :

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)dx=\begin{cases}\frac{2}{1-n^2} & n=0,2,4,\cdots\\ 0 & n=1,3,5,\cdots\end{cases}\qquad (٤.٢٢)$$

الإثبــــات : لإثبات العلاقة نستخدم تعريف $T_n(x)$ ونستخدم التعويض

$$x=\cos\theta$$

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \cos(n\cos^{-1}x)\,dx = -\int_{\pi}^{0} \cos(n\theta)\sin\theta\,d\theta$$
$$= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left[\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\right]d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\right]_{0}^{\pi}, \quad n \neq 1$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-1}\left[(-1)^{n-1}-1\right] - \frac{1}{n+1}\left[(-1)^{n+1}-1\right]\right], \; n \neq 1$$

ونلحظ عندما تكون $n = 3,5,\cdots$ تنعدم القيمة بين الأقواس ، وعندما تكون $n = 0,2,4,\cdots$ تتضاعف القيمة ، وعليه نجد أن :

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx = \left[\frac{1}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right] = \frac{2}{1-n^2}, \qquad n = 0,2,4,\cdots$$

أما إذا كان $n=1$ فمن السهل ملاحظة أن :

$$\int_{-1}^{1} T_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

مثال(٤)

أثبت أن :

$$\sqrt{1-x^2}\,T_n(x) = U_{n+1}(x) - xU_n(x) \qquad (٤.٢٣)$$

الإثبات: بوضع $x = \cos\theta$ ، فإن :

$$\sqrt{1-x^2}\,T_n(x) = \sin\theta\cos n\theta$$
$$= \sin(n+1)\theta - \cos\theta\sin n\theta = U_{n+1}(x) - xU_n(x)$$

مثال(٥)

أثبت أن :

$$\sum_{r=0}^{n} T_{2r}(x) = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} U_{2n+1}(x)\right\} \qquad (٤,٢٤)$$

الإثبات: بوضع $x = \cos\theta$ ، فإن :

$$\sum_{r=0}^{n} T_{2r}(x) = \sum_{r=0}^{n} T_{2r}(\cos\theta) = \sum_{r=0}^{n} \cos 2r\theta = \operatorname{Re}\sum_{r=0}^{n} e^{2ir\theta}$$

$$= \operatorname{Re}\sum_{r=0}^{n} \frac{(1-e^{2i\theta})e^{2ir\theta}}{1-e^{2i\theta}} = \operatorname{Re}\frac{1-e^{i(2n+2)\theta}}{1-e^{2i\theta}}$$

$$= \operatorname{Re}\frac{(1-e^{i(2n+2)\theta})(1-e^{-2i\theta})}{(1-e^{2i\theta})(1-e^{-2i\theta})} \qquad \text{(بالضرب في مرافق المقام)}$$

$$= \operatorname{Re}\frac{\{1-\cos(2n+2)\theta - i\sin(2n+2)\theta\}\{1-\cos 2\theta + i\sin 2\theta\}}{2-e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}}$$

$$= \frac{1}{2-2\cos 2\theta}\{(1-\cos 2\theta)(1-\cos(2n+2)\theta) + \sin 2\theta \sin(2n+2)\theta\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1-\cos(2n+2)\theta + \frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta}\sin(2n+2)\theta\right\}$$

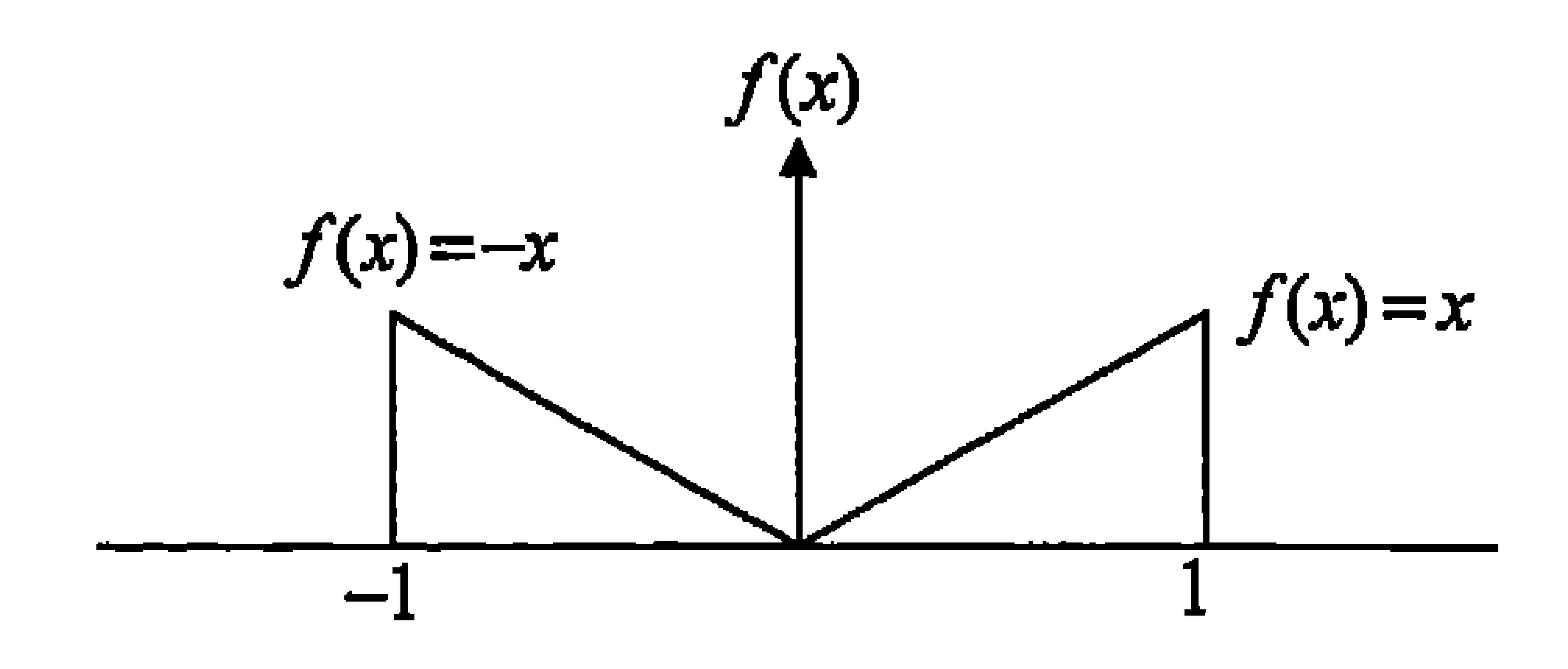
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin(2n+2)\theta\cos\theta - \cos(2n+2)\theta\sin\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin((2n+2)\theta-\theta)}{\sin\theta}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{U_{2n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

مثال(٦)

عبر عن الدالة $-1 < x < 1 \quad , f(x) = |x|$ بدلالة متسلسلة شبيشف

الحل: نلحظ تصرف الدالة $|x|$ كالآتي:



وعليه نكتب العلاقة :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nT_n(x)$$

حيث

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

لكن $f(x)=|x|$. إذاً

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}$$

ولحساب A_n يجب ملاحظة الآتي، حيث إن $T_{2n+1}(x)$ لقيم n تكون الدالة فردية في حين يكون المقدار $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ زوجيا وعليه يكون $\frac{xT_{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$ دالة فردية ويكون:

$$A_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}\cdot T_{2n+1}(x)\,dx=0$$

هذه العلاقة توضح لنا أن :

$$A_1 = A_3 = A_5 = \cdots = A_{2n+1} = \cdots = 0$$

بنفس الطريقة نجد أن $\frac{xT_{2n}}{\sqrt{1-x^2}}$ دالة زوجية ، وعليه يكون

$$A_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{xT_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{x\cos(2n\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

باستعمال التعويض $x = \cos\theta$ نجد أن $d\theta = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ، وأيضاً

$$A_{2n} = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cos 2n\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(2n+1)\theta + \cos(2n-1)\theta\}d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)$$

وفي النهاية نصل إلى :

$$A_{2n} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

المعادلة الأخيرة تعطي قيم معاملات شيبشف صراحة فنحصل على

$$|x| = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}T_0(x) + \frac{1}{1\cdot 3}T_2(x) - \frac{1}{3\cdot 5}T_4(x) + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}T_{2n}(x) + \cdots\right]$$

مثال(٧)

أثبت أن :

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

الإثبات نستخدم العلاقة :

$$T_{n+m}(x) - 2T_n(x)T_m(x) + T_{|n-m|}(x) = 0$$

وذلك للحالة $m = n = 1$ حيث نحصل على :

$$T_2(x) - 2xT_1^2(x) + T_0(x) = 0$$

وحيث إن $T_1(x) = x$ ، $T_0(x) = 1$ ، فإن :

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

بالمثل نضع $n = 2$

$$T_3(x) - 2xT_2(x) + T_1(x) = 0$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

عند $n = 3$

$$T_4(x) - 2xT_3(x) + T_2(x) = 0$$

$$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1)$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

عند $n = 4$

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x)$$

$$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x)$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

تمـــارين

١- أثبت صحة العلاقات الآتية :

(أ) $\sqrt{1-x^2}U_n(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x)$

(ب) $2\{T_n(x)\}^2 = 1 + T_{2n}(x)$

(ج) $\{T_n(x)\}^2 - T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) = 1 - x^2$

(د) $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

٢- أثبت أن $\dfrac{U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ تحقق المعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + (n^2-1)y = 0$$

٣- أوجد تعبيراً بدلالة دالة شبيشف للدوال الآتية :

$$f(x) = 3 \;,\; f(x) = 2 - x \;,\; f(x) = x^2 \,,\quad -1 \le x \le 1$$

٤- أثبت أن :

(أ) $$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx = \begin{cases} \frac{2}{1-n^2} & n = 0,2,4,\cdots \\ 0 & n = 1,3,5,\cdots \end{cases}$$

(ب) $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$

(ج) $(1-x^2)U_n'(x) = -nxU_n(x) + nU_{n-1}(x)$

(د) $T_{2n}'(x) = 4n\sum_{j=1}^{n} T_{2j-1}(x)$

(هـ) $T_{2n+1}'(x) = (2n+1)\left[T_0(x) + 2\sum_{j=1}^{n} T_{2j}(x)\right]$

الفصل الخامس

دوال بسل
Bessel Functions

ظهرت معادلة بسل في أعمال كل من السويسري دانيال برنوي (١٧٠٠- ١٧٨٢م) المتعلقة بدراسة تأرجح سلسلة معلقة، ونظرية أويلر (١٧٠٧- ١٧٨٣م) عن اهتزاز الأغشية الدائرية، وأعمال الألماني بسل (١٧٨٢- ١٨٤٦م) المتعلقة بدراسة حركة الكواكب السيارة، ولمعادلة بسل والمعادلة المعدلة $x^2y''+xy'-(x^2+n^2)\,y=0$ والدوال المرتبطة بهما والمعرفة من قبل بسل عام ١٨٢٤م تطبيقات كثيرة في نظرية المرونة، وحركة السوائل والغازات وانتشار الموجات ونظرية الجهد (Potential theory).

ويضم هذا الفصل عشرة بنود ندرس فيها معادلة بسل والتمثيل التكاملي لها، الدالة المولدة والعلاقات التكرارية ودالة بسل العامة والمعدلة والعلاقات التكرارية لها وتمثيل دالتي بسل وبسل المعدلة في أشكال دوال تكاملية، ودوال أخرى مرتبطة بدالة بسل وبعض التطبيقات.

(٥,١)"معادلة بسل وحلها "

تعرف معادلة بسل من الرتبة n كالآتي:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \qquad (٥,١)$$

وبمقارنة المعادلة (٥,١) بطريقة فروبينس ص١٣ نجد أن $r(x) = x^2 - n^2 , q(x) = 1$

فيكون الحل متقاربا لجميع قيم x. وحين نفرض أن الحل على الصورة :

$$z(x,s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{s+r} \qquad (٥,٢)$$

نجد أن :

$$\frac{dz(x,s)}{dx} = \sum_{r=0}^{\infty} (s+r) a_r x^{s+r-1}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)(s+r-1) a_r x^{s+r-2} \qquad (٥,٣)$$

وباستخدام (٥,٣)، (٥,٢) والمعادلة (٥,١) نجد أن :

$$\sum_{r=0}^{\infty} (s+r)(s+r-1) a_r x^{s+r} + \sum_{r=0}^{\infty} (s+r) a_r x^{s+r} + (x^2 - n^2) \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{s+r} = 0 \qquad (٥,٤)$$

ويقسمة طرفي المعادلة (٥,٤) على x^s ، $x \neq 0$ ثم أخذ معاملات x^1, x^0 ثم x^r نجد أن :

$$\{s(s-1) + s - n^2\} a_0 = 0 \qquad (٥,٥)$$

$$\{(s+1)s + (s+1) - n^2\} a_1 = 0 \Leftrightarrow [(s+1)^2 - n^2] a_1 = 0 \qquad (٥,٦)$$

$$\{(s+r)(s+r-1) + (s+r) - n^2\} a_r + a_{r-2} = 0 \qquad r \geq 2 \qquad (٥,٧)$$

ومن ثم نجد من المعادلة (٥,٥) أن المعادلة الأساسية حين $a_0 \neq 0$ تعطي الآتي :

$$s(s-1) + s - n^2 = 0 \Leftrightarrow s^2 - n^2 = 0 \Leftrightarrow s = \pm n$$

فيكون هناك حلان ، والفرق بين الحلين عدد صحيح قدره $2n$. أما بالنسبة للمعادلة (٥,٦) فإن $s = \pm n$ يستلزم أن $(s+1)^2 - n^2 \neq 0$ وعليه يكون الحل الوحيد لهذه المعادلة هو $a_1 = 0$.بناء على ذلك تصبح المعادلة (٥,٧) على الصورة :

$$\{(s+r)^2-n^2\}a_r+a_{r-2}=0$$ أي أن $$a_r=-\frac{a_{r-2}}{(r+s)^2-n^2}$$

ويوضع $s=n$ في المعادلة الأخيرة نجد أن :

$$a_r=-\frac{a_{r-2}}{r(2n+r)}\,,\quad r\geq 2$$

وللحصول على علاقات تكرارية نضع $r=2,4,\cdots$ على الترتيب فنحصل على :

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2n+2)}=(-1)\frac{a_0}{2^2(n+1)}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(2n+4)}=(-1)^2\frac{a_0}{2^4\cdot 2(n+1)(n+2)}$$

$$a_6=-\frac{a_4}{6(2n+6)}=(-1)^3\frac{a_0}{2^6 3!(n+1)(n+2)(n+3)}$$

وبوجه عام نجد أن :

$$a_{2r}=(-1)^r\frac{a_0}{2^{2r}r!(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+r)}.$$

لكن

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)\cdot 1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots n}=\frac{(n+r)!}{n!}=\frac{\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(n+1)}$$

إذاً

$$a_{2r}=(-1)^r\frac{a_0\Gamma(n+1)}{2^{2r}r!\Gamma(n+r+1)} \qquad (٥,٨)$$

ومن العلاقتين (٥,٦)، (٥,٧)، نجد أن :

$$a_1=a_3=a_5=\cdots=0$$

إذاً يكون الحل كالآتي :

$$z(x,s)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{a_0\Gamma(n+1)}{2^{2r}r!\Gamma(n+r+1)}x^{2r+n} \qquad (٥,٩)$$

وحيث إن a_0 ثابت اختياري فإننا يمكن أن نختاره على الصورة $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$

وعليه يكون حل المعادلة (٥,١) على الشكل :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)} (\frac{x}{2})^{2r+n} \qquad (٥,١٠)$$

وهذه المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x.

وعند الجذر الثاني $s = -n$ يمكن من العلاقة (٥,١٠) الحصول على الآتي :

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)} (\frac{x}{2})^{2r-n} \qquad (٥,١١)$$

لاحظ أنه عندما $2r < n$ و $x = 0$ ، نجد أن $J_n(0)$ محدودة بينما $J_{-n}(0) \to \infty$ وعليه فإن الحل $J_{-n}(x)$ لا يساوي $J_n(x)$ مضروباً في مقدار ثابت ولكنه حل مستقل بذاته ، ويصبح للمعادلة(٥,١) حلان هما $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ ، وتوضح المبرهنة الآتية العلاقة بينهما.

مبرهنة(١)

إذا كان n عدداً صحيحاً ، فإن :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad (٥,١٢)$$

البرهان

من العلاقة (٥,١١) عندما تكون $n > 0$ ، نجد أن :

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)} (\frac{x}{2})^{2r-n}$$

وحيث إن دالة جاما تؤول إلى ما لانهاية عند القيم الصحيحة السالبة ، إذاً $\Gamma(-n+r+1) \to \infty$ لكل $r = 0,1,2,\cdots,n-1$ ، وعليه فإن $J_{-n}(x) \to 0$ ،

وهـذا مـستحيل كمـا سبق دراسته في دالـة جامـا ، وعلـى ذلـك نـرفض جميـع قـيم $0 \le r \le n-1$ وتكون دالة $J_{-n}(x)$ على الشكل :

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=n}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(-n+r+1)} (\frac{x}{2})^{2r-n}$$

باختيار الوضع $m = r - n$ وتغيير الحدود طبقاً لهذا الاختيار نجد أن :

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{1}{(m+n)!\Gamma(1+m)} (\frac{x}{2})^{2(m+n)-n}$$

وعليه :

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{1}{(m+n)!\Gamma(1+m)} (\frac{x}{2})^{2m+n}$$

وحيث إن :

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(n+m+1)} (\frac{x}{2})^{2m+n}$$

وأيضاً :

$$\begin{aligned}(m+n)!\Gamma(m+1) &= (m+n)(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)m!\Gamma(m+1) \\ &= (m!)[(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\cdots(m+1)\Gamma(m+1)]\end{aligned}$$

باستخدام العلاقة $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ نصل إلى :

$$(m+n)!\Gamma(m+1) = m!\Gamma(m+n+1)$$

وبالتالي نكتب $J_{-n}(x)$ على الصورة :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!\Gamma(m+n+1)} (\frac{x}{2})^{2m+n} = (-1)^n J_n(x)$$

ملاحظة

يمكن إثبات صحة العلاقة السابقة كالآتي:

من تعريف $J_n(x)$ نحصل على:

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k-n}}{k!\Gamma(-n+k+1)}$$

بوضع $k=n+s$ في المعادلة السابقة نحصل على:

$$J_{-n}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s}(x/2)^{2s+n}}{(n+s)!\Gamma(s+1)}$$

ومن ثم نحصل على:

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(x/2)^{2s+n}}{s!\Gamma(n+s+1)}=(-1)^nJ_n(x)$$

مبرهنة(٢)

الحلان الخاصان بمعادلة بسل لجميع قيم n يكونان على الشكل

$$J_n(x)\ ,\quad Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cdot\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi} \tag{٥،١٣}$$

البرهان

(أ) عندما تكون n عددا غير صحيح

في هذه الحالة $\sin n\pi\neq 0$ وعليه يكون $Y_n(x)$ تركيبة خطية من كل من $J_{-n}(x),J_n(x)$. وحيث أن $J_{-n}(x),J_n(x)$ حلان مستقلان فإن $J_n(x)$ والتركيبة الخطية المكونة من $J_{-n}(x),J_n(x)$ حلان مستقلان أيضاً.

(ب) عندما تكون n عددا صحيحا

في هذه الحالة نجد أن $\cos n\pi=(-1)^n,\sin n\pi=0$ وعليه نجد أن:

$$J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)-(-1)^nJ_n(x)=0$$

وعليه يكون $Y_n(x)=\frac{0}{0}$ كمية غير معينة مما يستوجب تطبيق نظرية لوبيتال

$$Y_n(x)=\lim_{r\to n}\frac{\cos\pi r J_r(n)-J_{-r}(x)}{\sin\pi r}=\frac{\frac{\partial}{\partial r}\{\cos\pi r\cdot J_r(n)-J_{-r}(x)\}_{r=n}}{[\frac{\partial}{\partial r}\sin\pi r]_{r=n}}$$

$$=\frac{\{-\pi\sin\pi r J_n(x)+\cos\pi r\frac{\partial}{\partial r}J_r(x)-\frac{\partial}{\partial r}J_{-r}(x)\}_{r=n}}{[\pi\cos\pi r]_{r=n}}$$

$$=\frac{\cos n\pi\left[\frac{\partial}{\partial r}J_r(x)\right]_{r=n}-\left[\frac{\partial}{\partial r}J_{-r}(x)\right]_{r=n}}{\pi\cos n\pi}$$

وعليه يكون :

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}J_r(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial r}J_{-r}(x)\right]_{r=n} \quad (٥,١٤)$$

وعليه يجب القيام بإثبات حالتين إحداهما : أن الدالة $Y_n(x)$ تمثل حلاً لمعادلة بسل والثانية : أن هذا الحل مستقل عن الحل $J_n(x)$. وحيث إن $J_r(x)$ يحقق معادلة بسل

$$x^2\frac{d^2J_r(x)}{dx^2}+x\frac{dJ_r(x)}{dx}+(x^2-r^2)J_r(x)=0$$

بالتفاضل بالنسبة إلى r نجد أن :

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_r(x)}{\partial r}+x\frac{d}{dx}\frac{\partial J_r(x)}{\partial r}+(x^2-r^2)\frac{\partial J_r(x)}{\partial r}-2rJ_r(x)=0 \quad (٥,١٥)$$

لكن $J_{-r}(x)$ تحقق معادلة بسل أيضاً وعليه نجد أن :

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial J_{-r}(x)}{\partial r}+x\frac{d}{dx}\frac{\partial J_{-r}(x)}{\partial r}+(x^2-r^2)\frac{\partial J_{-r}(x)}{\partial r}-2rJ_{-r}(x)=0 \quad (٥,١٦)$$

بضرب المعادلة (٥,١٦) في المقدار $(-1)^r$ والطرح من المعادلة (٥,١٥) نجد أن :

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}\{\frac{\partial J_r(x)}{\partial r} - (-1)^r \frac{\partial J_{-r}(x)}{\partial r}\} + x\frac{d}{dx}\{\frac{\partial J_r(x)}{\partial r} - (-1)^r \frac{\partial J_{-r}(x)}{\partial r}\}$$

$$+(x^2 - r^2)\{\frac{\partial J_r(x)}{\partial r} - (-1)^r \frac{\partial J_{-r}(x)}{\partial r}\} - 2r\{J_r - (-1)^r J_{-r}\} = 0$$

في المعادلة الأخيرة بوضع $r = n$ مع استخدام العلاقة (٥,١٤) نحصل على

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} Y_n(x) + x\frac{d}{dx} Y_n(x) + (x^2 - n^2) Y_n(x) - \frac{2n}{\pi}[J_n(x) - (-1)^n J_{-n}(x)] = 0 \quad (٥,١٧)$$

باستخدام العلاقة $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ينتج الآتي :

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} Y_n(x) + x\frac{d}{dx} Y_n(x) + (x^2 - n^2) Y_n(x) = 0 \quad (٥,١٨)$$

ومن ثم فإن $Y_n(x)$ تحقق معادلة بسل من الرتبة n ، وعندما $x = 0$ نجد أن $Y_n(x) \to \infty$ وعليه يكون $Y_n(x)$ حلاً مستقلاً عن $J_n(x)$.

مبرهنة(٣)

إذا كانت n عدداً صحيحاً ، فإن :

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \quad (٥,١٩)$$

البرهان

بما أن

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}[\frac{\partial}{\partial r} J_r(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial r} J_{-r}(x)]_{r=n}$$

إذاً بالتعويض عن n بالمقدار $(-n)$ ، نجد أن :

$$Y_{-n}(x) = \frac{1}{\pi}[\frac{\partial}{\partial r} J_r(x) - (-1)^{-n} \frac{\partial}{\partial r} J_{-r}(x)]_{r=-n}$$

و بالتعويض عن r بالمقدار $(-r)$ ، نجد أن :

$$Y_{-n}(x)=\frac{1}{\pi}[\frac{\partial}{\partial(-r)}J_{-r}(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial(-r)}J_r(x)]_{r=n}$$
$$=\frac{1}{\pi}[-\frac{\partial}{\partial r}J_{-r}(x)+(-1)^n\frac{\partial}{\partial r}J_r(x)]_{r=n}$$
$$=\frac{(-1)^n}{\pi}[\frac{\partial}{\partial r}J_r(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial r}J_{-r}(x)]_{r=n}=(-1)^nY_n(x)$$

نستنتج مما تقدم أن $J_n(x)$ حل لمعادلة بسل من النوع الأول بينما $Y_n(x)$ حل من النوع الثاني.

(٥,٢) "الدالة المولدة والتمثيل التكاملي لدالة بسل "

مبرهنة(٤)

$$\exp\{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(x) \qquad (٥,٢٠)$$

البرهان

بما أن

$$\exp\{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\}=\exp(\frac{xt}{2})\cdot\exp\{-\frac{x}{2t}\}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}xt)^r}{r!}\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\frac{-x}{2t})^s}{s!}$$
$$=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\,(\frac{1}{2})^{r+s}\,x^{r+s}t^{r-s}}{r!\,s!} \qquad (5.21)$$

وإذا كانت $n=r-s\geq 0$ ، فإن $r=n+s$ ويكون :

$$\text{معامل } t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^s\,(\frac{1}{2})^{2s+n}\frac{x^{2s+n}}{(n+s)!\,s!}$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}(1)^s\frac{(\frac{x}{2})^{2s+n}}{\Gamma(n+s+1)s!}=J_n\,(x)$$

وللحصول على حدود تحوي t^{-n} ، يجب أن يكون $s=n+r\geq 0$ ، وعليه فإن :

$$t^{-n} \text{ معامل} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+r} \frac{(\frac{x}{2})^{2r+n}}{(n+r)!\,r!} = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}(1)^r \frac{(\frac{x}{2})^{2r+n}}{\Gamma(n+r)\,r!}$$
$$= (-1)^n J_n(x) = J_{-n}(x)$$

إذاً

$$\exp\left\{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\right\} = J_0(x) + tJ_1(x) + \cdots + t^m J_m(x) + \cdots + \frac{1}{t}J_{-1}(x) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{t^m}J_{-m}(x) + \cdots$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$$

- **التمثيل التكاملي لدالة بسل**

مبرهنة(٥)

إذا كان n عدداً صحيحاً، فإن :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\phi - x\sin\phi)\,d\phi \qquad (٥,٢٢)$$

البرهان

من مبرهنة (٤)، نجد أن :

$$\exp\{\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})x\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x)$$
$$= J_0(x) + \sum_{n=-\infty}^{n=-1} t^n J_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n J_n(x)$$
$$= J_0(x) + \sum_{k=\infty}^{k=1} t^{-k} J_{-k}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^n J_n(x)$$
$$= J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\{t^n J_n(x) + t^{-n}J_{-n}(x)\}$$

باستخدام العلاقة $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ نجد أن :

$$\exp\{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\{t^n + (-1)^n t^{-n}\}J_n(x)$$

وبوضع $t = e^{i\theta}$ نجد أن:

$$t - \frac{1}{t} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

باستخدام هذه العلاقة نحصل على :

$$\exp\{ix\sin\theta\} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\{e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta}\}J_n(x) \quad (٥.٢٣)$$

وفي الحالة التي فيها n زوجية نجد أن :

$$e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos n\theta$$

وفي الحالة التي فيها n فردية ، نجد أن :

$$e^{in\theta} + (-1)^n e^{-in\theta} = e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i\sin n\theta$$

وعليه تتحول المعادلة (٥.٢٣) إلى الآتي :

$$\exp\{ix\sin\theta\} = J_0(x) + \sum_{n\ even} 2\cos n\theta\cdot J_n(x) + \sum_{n\ odd} 2i\sin n\theta\cdot J_n(x)$$

وعليه فإن :

$$\cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta) = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\cos 2k\theta\cdot J_{2k}(x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} 2i\sin(2k-1)\theta\cdot J_{2k-1}(x) \quad (٥.٢٤)$$

مما يستلزم أن :

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\cos 2k\theta\cdot J_{2k}(x) \quad (٥.٢٥)$$

$$\sin(x\sin\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\sin(2k-1)\theta\cdot J_{2k-1}(x) \quad (٥.٢٦)$$

بضرب طرفي المعادلة (٥،٢٥) في $\cos n\theta$ والمكاملة على الفترة $[0,\pi]$ نجد أن :

$$\int_0^\pi \cos n\theta \cdot \cos(x\sin\theta)d\theta = J_0(x)\int_0^\pi \cos n\theta d\theta + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x)\int_0^\pi \cos 2k\theta \cos n\theta d\theta$$

وحيث إن :

$$\int_0^\pi \cos m\theta \cdot \cos n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

نجد أن :

$$\int_0^\pi \cos n\theta \cdot \cos(x\sin\theta)d\theta = \begin{cases} \pi J_n(x) & n \text{ عدد زوجي} \\ 0 & n \text{ عدد فردي} \end{cases} \quad (٥،٢٧)$$

بالمثل عند ضرب العلاقة (٥،٢٦) في $\sin n\theta$ والمكاملة على الفترة $[0,\pi]$ مع الأخذ في الاعتبار العلاقة التكاملية

$$\int_0^\pi \sin m\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases}$$

نحصل على :

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin(x\sin\theta)d\theta = \begin{cases} 0 & n \text{ عدد زوجي} \\ \pi J_n(x) & n \text{ عدد فردي} \end{cases} \quad (٥،٢٨)$$

وعليه بجمع العلاقتين (٥،٢٨)، (٥،٢٧) نحصل على :

$$\int_0^\pi \{\cos n\theta \cos(x\sin\theta) + \sin n\theta \sin(x\sin\theta)\}d\theta = \pi J_n(x)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية :

$$\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\phi = \cos(\psi - \phi)$$

نصل إلى :

$$\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta = \pi J_n(x), \quad \forall n \in Z$$

مبرهنة(٦)

$$J_n(x) = \frac{(\frac{x}{2})^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt \qquad (n > \tfrac{-1}{2}) \qquad (٥.٢٩)$$

البرهان

لإثبات المبرهنة نحسب التكامل الآتي :

$$I = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(ixt)^r}{r!}dt$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(ix)^r}{r!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r\,dt$$

من الملحوظ أنه إذا كانت r فردية فإن ناتج التكامل I يصبح صفراً. أما إذا كانت r زوجية فإننا نفرض أن $r = 2s$ ، فنجد أن :

$$I_1 = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^r\,dt = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^{2s}\,dt = 2\int_{0}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}t^{2s}\,dt$$

وعند وضع $t^2 = u$ يكون :

$$I_1 = \int_0^1(1-u)^{n-\frac{1}{2}}u^{s-\frac{1}{2}}du = \beta(n+\tfrac{1}{2}, s+\tfrac{1}{2})$$

وعليه نجد أن الطرف الأيمن في العلاقة (٥.٢٩) :

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{(\frac{x}{2})^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\cdot I = \frac{(\frac{x}{2})^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(ix)^{2s}}{(2s)!}\beta(n+\tfrac{1}{2}, s+\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{(\frac{x}{2})^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(x)^{2s}}{(2s)!}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+s+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(\frac{x}{2})^{2s+n}(\frac{1}{2})^{-2s}\Gamma(s+\frac{1}{2})}{(2s)!\Gamma(n+s+1)}$$

$$\text{الطرف الأيمن}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(\frac{x}{2})^{2s+n}(2)^{2s}\Gamma(s+\frac{1}{2})}{(2s)!\Gamma(n+s+1)} \quad (٥,٣٠)$$

ولكن

m عدد صحيح موجب ، $\Gamma(m)=(m-1)!$ ، $\Gamma(2m)=(2m-1)!$

إذاً

$$(2n-1)!=(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\cdots 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$
$$=[(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1][(2n-2)(2n-4)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2]$$
$$=2^{2n-1}[(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\cdots\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}][(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1]$$
$$=2^{2n-1}\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\cdot(n-1)!$$

وعليه نجد أنه بالضرب في $2n$ نحصل على :

$$(2n-1)!2n=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\cdot n[(n-1)!]$$

ومنه على :

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2})=\frac{(2n)!\cdot\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!} \quad (٥,٣١)$$

باستخدام هذه العلاقة في المعادلة (٥،٣٠) نجد أن :

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} (2)^{2s} \cdot (2s)! \sqrt{\pi}}{(2s)! \Gamma(n+s+1) 2^{2s} \, s!}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n}}{s! \Gamma(n+s+1)} = J_n(x)$$

(٥،٣) علاقات تكرارية

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة العلاقات التكرارية لدالة بسل ونبدأ بالآتي :

$$(1) \ \frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x) \qquad (٥،٣٢)$$

ولإثبات تلك العلاقة نستخدم الآتي :

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}$$

بضرب هذه العلاقة في x^n ثم نفاضل نحصل على :

$$\frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = \frac{d}{dx}\left\{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n} x^{2r+2n}\right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2r+2n) x^{2r+2n-1}}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(r+n) x^{2r+n-1}}{r! (n+r) \Gamma(n+r)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+n-1}$$

$$= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n-1}}{r! \Gamma(n+r)} = x^n J_{n-1}(x)$$

ملاحظة

يمكن أن تكتب العلاقة (١) على الشكل الآتي :

$$x^n J_n(x) = \int x^n J_{n-1}(x)\,dx + c$$

ولإثبات صحة العلاقة الآتية :

$$(2)\quad \frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = -x^{-n}J_{n+1}(x) \qquad (٥,٣٣)$$

لاحظ أن :

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = \frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}\cdot\frac{1}{2^{2r+n}}x^{2r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{2r}{r!\Gamma(n+r+1)}\cdot\frac{1}{2^{2r+n}}x^{2r-1}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{r}{r!\Gamma(n+r+1)}\cdot\frac{1}{2^{2r+n-1}}x^{2r-1}$$

وأن هذا المقدار يتلاشى عند $r = 0$ لذلك نضع $r = s+1$ فيكون :

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} \frac{(s+1)x^{2(s+1)-1}}{(s+1)!\Gamma(n+s+2)}\cdot\frac{1}{2^{2(s+1)+n-1}}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1} \frac{x^{2s+1}}{s!\Gamma(n+s+2)}\cdot\frac{1}{2^{2s+n+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = -x^{-n}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{(\frac{x}{2})^{2s+n+1}}{s!\Gamma(n+s+2)} = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

ولإثبات صحة العلاقة الآتية :

$$(3)\quad J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x}J_n(x) \qquad (٥,٣٤)$$

نفاضل العلاقة (٥,٣٢) فنجد أن :

$$x^n J_n'(x) + nx^{n-1}J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

بالقسمة على x^n يتم إثبات العلاقة (٥،٣٤)

ولإثبات صحة العلاقة :

$$(4)\ \ J_n'(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x) \qquad (٥،٣٥)$$

من العلاقة (٥،٣٣) نحصل على :

$$x^{-n}J_n'(x)-nx^{-n-1}J_n(x)=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

بضرب العلاقة الأخيرة في x^n ينتج المطلوب.

ولإثبات صحة العلاقة :

$$(5)\ \ J_n'(x)=\frac{1}{2}\{J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\} \qquad (٥،٣٦)$$

اجمع المعادلتين (٥،٣٤) و (٥،٣٥) تحصل على المطلوب. ويطرح المعادلة (٥،٣٥) من المعادلة (٥،٣٤) ، نجد أن :

$$(6)\ \ J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x) \qquad (٥،٣٧)$$

ولإثبات العلاقة الآتية :

$$\frac{d}{dx}\{x^nY_n(x)\}=x^nY_{n-1}(x) \qquad (٥،٣٨)$$

يجب فصل الحالتين الآتيتين عندما تكون n عددا غيرصحيح أوعددا صحيحا ولذلك

(أ) عندما يكون n عدداً غير صحيح فإن :

$$Y_n(x)=\frac{\cos n\pi\cdot J_n(x)-J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

$$\frac{d}{dx}\{x^nY_n(x)\}=\frac{1}{\sin n\pi}[\cos n\pi\frac{d}{dx}(x^nJ_n(x))-\frac{d}{dx}(x^nJ_{-n}(x))]$$

باستخدام العلاقتين (٥،٣٢) و (٥،٣٣) نجد أن :

$$\frac{d}{dx}\left\{x^n Y_n(x)\right\}=\frac{1}{\sin n\pi}[\cos n\pi\cdot x^n J_{n-1}(x)-(-x^n J_{-n+1}(x))]$$

$$=\frac{x^n}{\sin n\pi}[\cos n\pi\cdot J_{n-1}(x)+J_{-(n-1)}(x)]$$

$$=\frac{x^n}{\sin(n\pi-\pi+\pi)}[\cos\{n\pi-\pi+\pi\}J_{n-1}(x)+J_{-(n-1)}(x)]$$

باستخدام العلاقات الآتية :

$$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha\ ,\quad \cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$$

نصل إلى :

$$\frac{d}{dx}\{x^n Y_n(x)\}=\frac{x^n}{-\sin(n-1)\pi}\{-\cos(n-1)\pi\cdot J_{n-1}(x)+J_{-(n-1)}(x)\}$$

$$=\frac{x^n}{\sin(n-1)\pi}\{J_{n-1}(x)\cdot\cos(n-1)\pi-J_{-(n-1)}(x)\}=x^n Y_{n-1}(x)$$

(ب) عندما يكون n عدداً صحيحاً فإن

$$Y_n(x)=\lim_{r\to n} Y_r(x)=\lim_{r\to n}\frac{\cos r\pi\, J_r(x)-J_{-r}(x)}{\sin r\pi}$$

وعليه تكون :

$$\frac{d}{dx}\{x^n Y_n(x)\}=\frac{d}{dx}\{x^n \lim_{r\to n} Y_r(x)\}$$

لكن كلاً من x^n و $Y_r(x)$ دالة متصلة. إذاً

$$\frac{d}{dx}\{x^n Y_n(x)\}=\lim_{r\to n}\frac{d}{dx}\{x^r Y_r(x)\}$$

$$=\lim_{r\to n}\{x^r Y_{r-1}(x)\}=x^n Y_{n-1}(x)$$

• دوال هنكل "Hankel Functions"

تعرف دوال هنكل كالآتي :

$$H_n^{(1)} = J_n(x) + iY_n(x) \tag{٥,٣٩}$$

$$H_n^{(2)} = J_n(x) - iY_n(x) \tag{٥,٤٠}$$

وأحياناً تسمى دوال هنكل بدوال بسل من النوع الثالث. وحيث إن :

$$Y_n(x) = \frac{\cos(n\pi)J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$$

للعدد n غير الصحيح ، فإن :

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \frac{i}{\sin n\pi}[\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)]$$

$$= \frac{i}{\sin n\pi}[(\cos n\pi - i\sin n\pi)J_n(x) - J_{-n}(x)]$$

$$= \frac{ie^{-in\pi}}{\sin n\pi}[J_n(x) - e^{in\pi}J_{-n}(x)]$$

أما

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - \frac{i}{\sin n\pi}[\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)]$$

$$= \frac{-i}{\sin n\pi}[(\cos n\pi - i\sin n\pi)J_n(x) - J_{-n}(x)]$$

$$= \frac{-ie^{in\pi}}{\sin n\pi}[J_n(x) - e^{-in\pi}J_{-n}(x)]$$

• أمثلة عامة على دالة بسل

مثال(١):

أثبت أن :

(أ) $\cos x = J_0(x) + 2\{J_2(x) - J_4(x) + J_6(x) - \cdots\}$

(ب) $\sin x = 2\{J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - \cdots\}$

الإثبات: نستخدم الدالة المولدة :

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\left[t^n + (-1)^n t^n\right]$$

ونضع $t = e^{i\phi}$ فنجد أن :

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{ix\sin\phi} = \cos(x\sin\phi) + i\sin(x\sin\phi)$$

وإذا كان n عددا زوجياً موجباً، فإن $n = 2m$ ، $m \in \mathbb{Z}^+$ و

$$t^m + (-1)^n t^n = e^{2im\phi} + e^{-2im\phi} = 2\cos 2m\phi$$

وإذا كان n عددا فردياً موجباً، فإن $n = 2m+1$ ، $m \in \mathbb{N}$ و

$$t^n + (-1)^n t^n = e^{i(2m+1)\phi} - e^{-i(2m+1)\phi} = 2i\sin(2m+1)\phi$$

وعليه فإن

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \cos(x\sin\phi) + i\sin(x\sin\phi)$$

$$= J_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}\cos(2m\phi) + 2i\sum_{m+1}^{\infty} J_{2m+1}(x)\sin(2m+1)\phi$$

وبمطابقة الأجزاء الحقيقية في الطرفين ومطابقة الأجزاء التخيلية في الطرفين ينتج أن

$$\cos(x\cos\phi) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}\cos(2m\phi)$$

$$\sin(x\sin\phi) = 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(x)\sin(2m+1)\phi$$

وبوضع $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$ نحصل على :

$$\cos(x\cos\theta) = J_0(x) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}(x)\cos 2m\theta\ ,$$

$$\sin(x\cos\theta) = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m+1}(x)\cos(2m+1)\theta$$

وبوضع $\theta = 0$ في العلاقتين السابقتين ينتج أن :

$$\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - 2J_6(x) + \cdots$$
$$= J_0(x) - 2\{J_2(x) - J_4(x) + J_6(x) - J_8(x) + \cdots\} \ ,$$
$$\sin x = 2\{J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - \ldots\}$$

مثال(٢)

أثبت أن :

$$J_3(x) + 3J_0'(x) + 4J_0'''(x) = 0 \qquad (٥,٤١)$$

الإثبات نستخدم العلاقة العامة الآتية :

$$2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

ونضع $n = 2$ نحصل على :

$$2J_2'(x) = J_1(x) - J_3(x) \qquad (٥,٤٢)$$

ثم نضع $n = 1$ فنحصل على :

$$2J_1'(x) = J_0(x) - J_2(x) \qquad (٥,٤٣)$$

بتفاضل العلاقة (٥,٤٣) نحصل على :

$$2J_1''(x) = J_0'(x) - J_2'(x) \qquad (٥,٤٤)$$

ومن (٥,٤٢)،(٥,٤٣) ، (٥,٤٤) وحذف $J_2'(x)$ منها نجد أن :

$$J_3(x) = J_1(x) - 2J_0'(x) + 4J_1''(x)$$

لكن
$$\frac{d}{dx} x^{-n} J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

إذاً عندما $n = 0$ ، نجد أن :

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$$

ويتم المطلوب.

مثال(٣)

أثبت صحة العلاقة :

$$\int_0^a x^3 J_0(x)dx = a^3 J_1(a) - 2a^2 J_2(a) \tag{٥,٤٥}$$

الإثبات: نستخدم العلاقة الآتية :

$$\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$$

ونضع $n=1$ ، فنجد أن :

$$\frac{d}{dx}(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$$

وعليه فإن :

$$\int_0^a x^3 J_0(x)dx = \int_0^a x^2 (xJ_0(x))dx = \int_0^a x^2 d(xJ_1(x))$$

بالتكامل بالتجزيء واستخدام الملاحظة (ص١٣٠) نصل إلى :

$$\int_0^a x^3 J_0(x)dx = \{x^3 J_1(x)\}_0^a - 2\int_0^a x^2 J_1(x)dx$$

ولك

$$= \{x^3 J_1(x)\}_0^a - 2\{x^2 J_2(x)\}_0^a = a^3 J_1(a) - 2a^2 J_2(a)$$

ن

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$$

وعندما $n=1$ نجد أن:

$$\frac{2}{x} J_1(x) = J_2(x) + J_0(x)$$

وعليه فإن:

$$J_2(a) = \frac{2}{a} J_1(a) - J_0(a)$$

ويصبح التكامل كالآتي :

$$\int_0^a x^3 J_0(x)dx = a^3 J_1(a) - 2a^2\left\{\frac{2}{a}J_1(a) - J_0(a)\right\}$$

وبالاختصار يحصل المطلوب.

مثال(٤)

أثبت أن :

(أ) $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ ، (ب) $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$

(ج) $J^2_{-\frac{1}{2}}(x) + J^2_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{2}{\pi x}$

الحل

لإثبات (أ) نستخدم العلاقة :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}$$

بوضع $n = -\frac{1}{2}$ نحصل على :

$$J_{-\frac{n}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k-\frac{1}{2}}}{k!\Gamma(\frac{1}{2}+k)} = \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x)^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{1}{2})}$$

باستخدام العلاقة :

$$\Gamma(k+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!} \quad (\ast)$$

واستخدام العلاقة :

$$\Gamma(2n) = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n)\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \quad (\ast\ast)$$

يمكن كتابة $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ على الصورة التالية :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}(k-1)!x^{2k}}{2^k k!(2k-1)!}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2k(2k-1)!}$$

ومن ثم نجد أن :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

وحيث إن :

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

إذاً

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

لإثبات صحة العلاقة (ب): نضع $n=\frac{1}{2}$ في دالة بسل العامة فنجد أن :

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\frac{1}{2}}}{k!\Gamma(\frac{3}{2}+k)}=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\frac{1}{2}}}{2^{2k+1}k!\Gamma(\frac{3}{2}+k)}$$

باستخدام العلاقة (❖❖) وذلك بالتعويض عن كل n بـ $n+1$ نحصل على :

$$\Gamma(2n+2)=\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n+1)\Gamma(n+\tfrac{3}{2})$$

باستخدام (❖) نجد أن :

$$\Gamma(n+\tfrac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}$$

ومن ثم نحصل على الآتي:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}2^{2k+1}k!}{2^{2k+1}k!\sqrt{\pi}(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

لكن

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

إذاً

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

بتربيع العلاقتين (أ)، (ب) نحصل على العلاقة (ج).

تمـــارين

١- أثبت صحة العلاقات الآتية:

(أ) $J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x)$

(ب) $J_2(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x} J_0'(x)$

(ج) $\frac{d}{dx}\{xJ_1(x)\} = xJ_0(x)$

٢- إذا كانت a أحد جذور المعادلة $J_0(x) = 0$ أثبت أن:

(أ) $\int_0^a J_1(x)dx = 1$ ، (ب) $\int_0^1 J_1(ax)dx = \frac{1}{a}$

(ج) $\int_0^\infty J_1(x)dx = 1$

٣- أثبت صحة العلاقة :

$$\frac{d}{dx}\{xJ_n(x)J_{n+1}(x)\} = x\{J_n^2(x) - J_{n+1}^2(x)\}$$

٤- أثبت الآتي :

$$\int J_3(x)dx = -J_2(x) - \frac{2}{x}J_1(x) + c \quad \text{(أ)}$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \quad \text{(ب)}$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right) \quad \text{(ج)}$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3 - x^2}{x^3}\sin x - \frac{3\cos x}{x}\right) \quad \text{(د)}$$

(٥,٤) "دالة بسل المعممة Generalized Bessel's Function"

في كثير من مسائل الفيزياء والرياضيات نتعرض إلى المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2\alpha}{x}\frac{dy}{dx} + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2 - n^2\gamma^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (٥,٤٦)$$

المعادلة (٥,٤٦) معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية أعم من معادلة بسل ، ويطلق عليها معادلة بسل المعدلة ، وسنثبت أن $y = x^{\alpha}C_n(\beta x^{\gamma})$ حل لها ، حيث :

$$C_n(x) = AJ_n(x) + BY_n(x) \text{ ، } n \text{ عدد صحيح} \quad (٥,٤٧)$$

$$C_n(x) = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \text{ ، } n \text{ عدد غير صحيح} \quad (٥,٤٨)$$

ولإثبات ذلك نبدأ من معادلة بسل :

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - n^2)u = 0$$

والتي لها الحل $u = C_n(t)$ ، بوضع $t = \beta s$ نحصل على :

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\beta}\frac{du}{ds} \;,\quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{d^2u}{ds^2}$$

ومنه نصل إلى :

$$s^2 \frac{d^2u(\beta s)}{ds^2}+s\frac{du(\beta s)}{ds}+(\beta^2 s^2-n^2)u(\beta s)=0 \qquad (٥,٤٩)$$

وهذه المعادلة لها الحل $u=C_n(\beta s)$ ، ضع $s=x^\gamma$ لنحصل على :

$$\frac{du}{ds}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}=\frac{x^{1-\gamma}}{\gamma}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2u}{ds^2}=\frac{1}{\gamma}x^{1-\gamma}\frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{1}{\gamma}\frac{du}{dx}\cdot(1-\gamma)x^{-\gamma}\frac{dx}{ds}$$

$$=\frac{x^{2-2\gamma}}{\gamma^2}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1-\gamma}{\gamma}x^{-\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma}x^{1-\gamma}\frac{du}{dx}$$

وعليه نجد أن :

$$\frac{d^2u}{ds^2}=\frac{1}{\gamma^2}x^{2-2\gamma}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1-\gamma}{\gamma^2}x^{1-2\gamma}\frac{du}{dx}$$

باستخدام الفرض والمشتقات الأولى والثانية تصبح المعادلة (٥,٤٩) على الصورة :

$$\frac{x^2}{\gamma^2}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{x(1-\gamma)}{\gamma^2}\frac{du}{dx}+\frac{x}{\gamma}\frac{du}{dx}+(\beta^2x^{2\gamma}-n^2)u=0$$

والتي يمكن أن تكتب على الشكل:

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+(\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}-n^2\gamma^2)u=0 \qquad (٥,٥٠)$$

وهذه المعادلة لها الحل $u=C_n(\beta x^\gamma)$

بوضع $u=yx^{-\alpha}$ في المعادلة (٥,٥٠) مع استخدام المشتقات التالية :

$$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}x^{-\alpha}-\alpha x^{-\alpha-1}y,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=x^{-\alpha}\frac{d^2y}{dx^2}-2\alpha x^{-\alpha-1}\frac{dy}{dx}+\alpha(1+\alpha)x^{-\alpha-2}y$$

نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$x^{2-\alpha}\frac{d^2y}{dx^2}-2\alpha x^{1-\alpha}\frac{dy}{dx}+\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha}y$$
$$+x^{1-\alpha}\frac{dy}{dx}-\alpha x^{-\alpha}y+(\beta^2\gamma^2x^{2\gamma}-n^2\gamma^2)x^{-\alpha}y=0$$

بالقسمة على $x^{2-\alpha}$ تنتج العلاقة :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{(1-2\alpha)}{x}\frac{dy}{dx}+(\beta^2\gamma^2x^{2\gamma-2}+\frac{\alpha^2-n^2\gamma^2}{x^2})y=0$$

والتي لها الحل $y=x^{\alpha}C_n(\beta x^{\gamma})$.

تتضح أهمية المعادلة (٥,٤٦) في الأمثلة الآتية :

مثال(١)

حل المعادلة

$$\frac{d^2y}{dx^2}+xy=0 \qquad (٥,٥١)$$

الحل

بمقارنة المعادلة (٥,٥١) بالمعادلة (٥,٤٦) نجد أن :

$$1-2\alpha=0\ ,\quad \alpha^2-n^2\gamma^2=0,\quad \beta^2\gamma^2=1,\quad 2\gamma-2=1$$

وعليه نحصل على الآتي:

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \gamma=\frac{3}{2},\quad \beta=\frac{2}{3},\quad n=\pm\frac{1}{3}$$

ويكون الحل :

$$y=\sqrt{x}\{AJ_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})+BJ_{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})\}$$

مثال(٢)

أثبت أنه إذا كانت المعادلة التفاضلية :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}+V=0 \quad (٥،٥٢)$$

لها الحل على الصورة $V(r,\theta)=F(r)G(\theta)$ فإن :

$$\frac{d^2 G}{d\theta^2}+\cot\theta\cdot\frac{dG}{d\theta}+k^2G=0,$$

$$r^2\frac{d^2F}{dr^2}+2r\frac{dF}{dr}+(r^2-k^2)F=0$$

حيث k^2 مقدار ثابت ثم أثبت أنه إذا كان $k^2=m(m+1)$ فإن :

$$F=r^{\frac{-1}{2}}(J_{m+\frac{1}{2}}(r)+J_{-m-\frac{1}{2}}(r))$$

ومن ثم أو بأي طريقة أخرى أوجد الحلين الخاصين للمعادلة التفاضلية والمستقلين عن الزاوية θ.

الحل

بفرض الحل على الصورة $V=F(r)G(\theta)$ ثم التفاضل والتعويض في (٥،٥٢) نجد أن :

$$G(\theta)F''+\frac{2}{r}GF'+\frac{F}{r^2}G''(\theta)+\frac{\cot\theta}{r^2}FG'(\theta)+FG=0$$

بترتيب المعادلة الأخيرة، نجد أن :

$$G(\theta)[F''+\frac{2}{r}F+F]=-F[\frac{1}{r^2}G''+\frac{\cot\theta}{r^2}G'(\theta)]$$

بضرب المعادلة السابقة في r ثم القسمة على GF نحصل على :

$$[\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF}{dr}+F]\cdot\frac{r^2}{F}=-\frac{1}{G}[\frac{d^2G}{d\theta^2}+\cot\theta\cdot\frac{dG}{d\theta}]=k^2$$

وعليه نجد أن :

$$\frac{d^2G}{d\theta^2}+\cot\theta\cdot\frac{dG}{d\theta}+k^2G=0 \qquad (٥,٥٣)$$

$$r^2\frac{d^2F}{dr^2}+2r\frac{dF}{dr}+(r^2-k^2F)=0 \qquad (٥,٥٤)$$

والآن افرض أن $k^2=m(m+1)$ وبذلك يمكنك كتابة (٥,٥٤) كالآتي :

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF}{dr}+\{1-\frac{m(m+1)}{r^2}\}F=0 \qquad (٥,٥٥)$$

بمقارنة هذه المعادلة بمعادلة بسل المعممة نجد أن :

$$1-2\alpha=2,\quad \alpha^2-n^2\gamma^2=-m(m+1),\quad \gamma=1,\quad \beta\gamma=1$$

وعليه فإن :

$$\beta=1,\qquad \gamma=1,\qquad \alpha=-\frac{1}{2}$$

$$n^2\gamma^2=m(m+1)+\alpha^2=m^2+m+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(4m^2+4m+1)$$

$$n=\pm(m+\frac{1}{2})$$

ويكون الحلان هما :

$$r^{\frac{-1}{2}}J_{m+\frac{1}{2}}(r),\quad r^{\frac{-1}{2}}J_{-m-\frac{1}{2}}(r)$$

أما في الحالة التي تكون المعادلة فيها مستقلة عن θ نحصل على الآتي :

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}+V=0$$

وهذه المعادلة مكافئة للحالة (٥،٥٥) عند وضع $m = 0$ ويكون الحلان هما :

$$r^{\frac{-1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(r)\ ,\ \ r^{\frac{-1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(r)$$

تمـــارين

١- حل المعادلات التفاضلية باستخدام دالة بسل المعممة :

(أ) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + 4(x^2 - \frac{1}{x^2})y = 0$ ، (ب) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{x}\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

(ج) $x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ، (د) $3\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(هـ) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 4(x^2 - \frac{m^2}{x^2})y = 0$

(و) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2m}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$

٢- أثبت أن $V = e^{nx}\{AJ_0(ny) + BY_0(ny)\}$ حل للمعادلة

$$\frac{\partial}{\partial x}(y\frac{\partial V}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial V}{\partial y}) = 0$$

٣- أثبت أن حلّي المعادلة :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

هما :

$$e^{\pm kz}\cos n\theta \cdot J_n(kr)\ ,\ \ e^{\pm kz}\sin n\theta \cdot J_n(kr)\ ,$$ k ثابت

(٥،٥) "دالة بسل المعدلة Modefied Bessel's Function "

عند وضع $\gamma = 1$ و $\alpha = 0$، $\beta = i = \sqrt{-1}$ في المعادلة (٥،٤٦) فإننا نحصل على المعادلة التفاضلية

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+n^2)y=0 \qquad (٥,٥٦)$$

وبناء على ذلك يكون حل هذه المعادلة هو

$$y=AJ_n(ix)+BY_n(ix) \qquad (٥,٥٧)$$

والدالتان $Y_n(ix), J_n(ix)$ تخيليتان (مركبتان) عندما تكون x حقيقية ، ولذلك اجعل

$$I_n(x)=i^{-n}J_n(ix) \qquad (٥,٥٨)$$

تجد أنه يمثل حلاً مستقلاً للمعادلة (٥,٥٦) ، ولإثبات أن ذلك الحل يمثل دالة حقيقية نتبع الآتي :

$$I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)=i^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(r+n+1)}(\frac{ix}{2})^{2r+n}$$

$$=i^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(r+n+1)}i^{2r}i^n(\frac{x}{2})^{2r+n}$$

وعليه فإن

$$I_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!\Gamma(r+n+1)}(\frac{x}{2})^{2r+n} \qquad (٥,٥٩)$$

ملاحظة: لكل عدد صحيح n ،

$$I_{-n}(x)=I_n(x) \qquad (٥,٦٠)$$

وذلك لأن :

$$I_{-n}(x)=i^nJ_{-n}(ix)=i^n(-1)^nJ_n(ix)$$

$$=i^n(-1)^ni^nI_n(x)=(-1)^n(i)^{2n}I_n(x)=I_n(x)$$

يمكن الحصول على الحل المستقل الثاني لدالة بسل المعدلة آخذين في الاعتبار الدالة $Y_n(ix)$. ويتضح لنا مما سبق أن $I_{-n}(x), I_n(x)$ يمثلان حلين للمعادلة التفاضلية (٥,٥٦) ، وهما حلان مستقلان عندما تكون n عدداً غير صحيح (حيث إن كلاً من

$J_{-n}(ix), J_n(ix)$ حلان مستقلان عندما تكون n عدداً غير صحيح) وعليه يمكن تعريف الدالة

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\sin n\pi}\right] \quad \text{(٥،٦١)}$$

n عدد غير صحيح

ومنه فإن $I_n(x), K_n(x)$ يمثلان حلين مستقلين للمعادلة (٥،٥٦) وعندما تكون n عدداً صحيحاً فإنه كما سبق يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال ، فنجد أن

$$K_n(x) = \lim_{r \to n} \frac{\pi}{2}\left[\frac{I_{-r}(x) - I_r(x)}{\sin r\pi}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial r} I_{-r}(x) - \frac{\partial}{\partial r} I_r(x)}{\pi \cos r\pi}\right]_{r=n} = \frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r} I_{-r}(x) - \frac{\partial}{\partial r} I_r(x)\right]_{r=n}$$

وبذلك نكون قد حصلنا على الحل المستقل الثاني.

وتوضح المبرهنة الآتية العلاقة بين $Y_n(x), J_n(x), K_n(x)$.

مبرهنة (٧)

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1}\left[J_n(ix) + iY_n(ix)\right] = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix) \quad \text{(٥،٦٢)}$$

البرهان

من العلاقة (٥،٦١)

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2\sin n\pi}\left[I_{-n}(x) - I_n(x)\right]$$

باستخدام العلاقة $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$ نجد أن :

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2\sin n\pi}\left[i^n J_{-n}(ix) - i^{-n} J_n(ix)\right]$$

وباستخدام العلاقتين :

$$Y_n(x) = \frac{\cos n\pi J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

$$J_{-n}(ix) = \cos n\pi J_n(ix) - \sin n\pi Y_n(ix)$$

نحصل على الآتي :

$$K_n(x)=\frac{\pi}{2\sin n\pi}\left[i^n\cos n\pi\cdot J_n(ix)-i^{-n}J_n(ix)-i^n\sin n\pi\cdot Y_n(ix)\right]$$
$$=\frac{\pi i^{n+1}}{2}\left\{iY_n(ix)+\frac{-i\cos n\pi-i^{-2n-1}}{\sin n\pi}J_n(ix)\right\}$$

لكن

$$-i\cos n\pi-i^{-2n-1}=-i\cos n\pi+i\cdot i^{-2n}\,,\quad i=\cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

إذاً

$$-i\cos n\pi-i^{-2n-1}=-i\cos n\pi+ie^{-in\pi}$$
$$=-i\cos n\pi+i(\cos n\pi-i\sin n\pi)=\sin n\pi$$

وعليه فإن

$$K_n(x)=\frac{\pi}{2}i^{n+1}\left\{J_n(ix)+iY_n(ix)\right\}$$

(٥,٦)علاقات تكرارية لدالة بسل المعدلة

$$(1)\ \frac{d}{dx}\{x^nI_n(x)\}=x^nI_{n-1}(x) \qquad (٥,٦٣)$$

ولإثبات صحة هذه العلاقة نستخدم العلاقة :

$$\frac{d}{dx}\{x^nI_n(x)\}=x^nJ_{n-1}(x)$$

ثم نستبدل x بالمقدار ix فنحصل على :

$$\frac{d}{d(ix)}\{(ix)^nJ_n(ix)\}=(ix)^nJ_{n-1}(ix)$$

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\{i^nx^n\cdot i^nI_n(x)\}=i^nx^ni^{n-1}I_{n-1}(x)$$

بالاختصار مع ملاحظة $(i)^{2n}=(-1)^n$ ، نجد أن :

$$\frac{d}{dx}\{x^n I_n(x)\}=x^n I_{n-1}(x)$$

$$(2)\ \frac{d}{dx}\{x^{-n} I_n(x)\}=x^{-n} I_{n+1}(x) \qquad (٥,٦٤)$$

ولإثبات هذه العلاقة ، نعوض x بالمقدار ix في العلاقة :

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right]=-x^n J_{n+1}(x)$$

لنحصل على :

$$\frac{d}{d(ix)}\{i^{-n}x^{-n}J_n(ix)\}=-i^{-n}x^{-n}J_{n+1}(ix)$$

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\{i^{-n}x^{-n}i^n I_n(x)\}=-i^{-n}x^{-n}i^{n+1}I_{n+1}(x)$$

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\{x^{-n}I_n(x)\}=-ix^{-n}I_{n+1}(x)$$

ومنها نجد أن :

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}I_n(x)\}=-x^{-n}I_{n+1}(x)$$

أيضاً يمكن إثبات العلاقة :

$$(3)\ I_n'(x)=I_{n-1}(x)-\frac{n}{x}I_n(x) \qquad (٥,٦٥)$$

ولإثبات هذه العلاقة نفاضل العلاقة (٥,٦٣) لنحصل على :

$$x^n I_n'(x)+nx^{n-1}I_n(x)=x^n I_{n-1}(x)$$

بالقسمة على x^n ينتج المطلوب.

كذلك من السهولة إثبات صحة العلاقة.

$$(4)\ \ I'_n(x) = \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x) \qquad (٥,٦٦)$$

وذلك بتفاضل المعادلة (٥,٦٤) فنجد أن :

$$x^{-n} I'_n(x) - n x^{-n-1} I_n(x) = x^{-n} I_{n+1}(x)$$

وبالقسمة على x^{-n} ينتج المطلوب.

وإذا جمعنا العلاقتين (٥,٦٦) ، (٥,٦٥) يمكن الحصول على العلاقة

$$(5)\ \ I'_n(x) = \frac{1}{2}\{I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\} \qquad (٥,٦٧)$$

وبالطرح نحصل على العلاقة :

$$(6)\ \ I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} I_n(x) \qquad (٥,٦٨)$$

ولإثبات صحة العلاقة الآتية :

$$(7)\ \ \frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = -x^n K_{n-1}(x) \qquad (٥,٦٩)$$

نستخدم مبرهنة(٧) فنجد أن $K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix)$ ، لكن

$$\frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = \frac{d}{dx}\{\frac{\pi}{2} i^{n+1} x^n H_n^{(1)}(ix)\}$$

إذاً بالتعويض عن ix بالمقدار x في الطرف الأيمن نجد أن :

$$\frac{d}{d(\frac{x}{i})}\{(\frac{x}{i})^n K_n(\frac{x}{i})\} = \frac{d}{d(\frac{x}{i})}\{\frac{\pi}{2} i x^n H_n^{(1)}(x)\}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\frac{d}{dx}\{x^n H_n^{(1)}(x)\}$$

وباستخدام العلاقة

$$\frac{d}{dx}\{x^n H_n^{(1)}(x)\} = x^n H_{n-1}^{(1)}(x)$$

نجد أن :

$$\frac{d}{d(\frac{x}{i})}\{(\frac{x}{i})^n K_n(\frac{x}{i})\} = -\frac{\pi}{2} x^n H_{n-1}^{(1)}(x)$$

وبالتعويض عن x بالمقدار ix نحصل على الآتي :

$$\frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = -\frac{\pi}{2} i^{n+1} x^n H_{n-1}^{(1)}(ix)$$

باستعمال مبرهنة(٧) مرة أخرى مع استبدال كل n بالمقدار $n-1$ نحصل على العلاقة المطلوبة.

وبنفس الطريقة يمكن إثبات صحة العلاقة :

$$(8)\quad \frac{d}{dx}\{x^{-n} K_n(x)\} = -x^{-n} K_{n+1}(x) \qquad (٥,٧٠)$$

وبتفاضل الطرف الأيسر للعلاقة (٥,٦٩) ثم قسمة المعادلة على x^n نحصل على العلاقة :

$$(9)\quad K_n'(x) = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x) \qquad (٥,٧١)$$

وبتفاضل الطرف الأيسر للمعادلة (٥,٧٠) نحصل على :

$$(10)\quad K_n'(x) = \frac{n}{x} K_n(x) - K_{n+1}(x) \qquad (٥,٧٢)$$

بجمع المعادلتين (٥,٧٢) ، (٥,٧١) نحصل على العلاقة :

$$(11)\quad K_n'(x) = -\frac{1}{2}\{K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)\} \qquad (٥,٧٣)$$

وبالطرح نجد أن :

$$(12)\ \ K_{n-1}(x)-K_{n+1}(x)=\frac{-2n}{x}K_n(x) \qquad (٥,٧٤)$$

(٥,٧) تمثيل دالة بسل وبسل المعدلة في أشكال ودوال تكاملية مختلفة

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على تمثيل دوال بسل في تكامل لبتشز وبعض تطبيقاته ، وتكاملات لوميل ومتسلسلات فورير- بسل ، إضافة إلى بعض التكاملات التي تحوي على دوال بسل ، ونبدأ بما يلي.

مبرهنة(٨)

"تكامل لبتشز Lipschitz intergral "

إذا كان $a>0$ ، فإن:

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)\,dx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

البرهان

بما أن :

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos cx dx=\frac{1}{a^2+c^2}\lim_{\alpha\to\infty}\left[-ae^{-ax}\cos cx+ce^{-ax}\sin cx\right]_0^\alpha,\quad (a>0)$$

$$=\frac{a}{a^2+c^2}$$

إذاً عند وضع $c=b\sin\theta$ نجد أن :

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx\sin\theta)\,dx=\frac{a}{a^2+b^2\sin^2\theta} \qquad (٥,٧٥)$$

وحيث إن $\cos(bx\sin\theta)$ قابلة للتكامل على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ ، إذاً :

$$\int_0^\infty e^{-ax}\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(bx\sin\theta)d\theta\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ad\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta} \qquad (٥,٧٦)$$

وعليه يمكن حساب تكامل الطرف الأيمن باستخدام التعويض $x=\tan\theta$ ، فنجد أن:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{ad\theta}{a^2+b^2\sin^2\theta}$$

$$I=\int_0^\infty\frac{a\cdot\frac{1}{1+x^2}dx}{a^2+b^2\frac{x^2}{1+x^2}}=\int_0^\infty\frac{adx}{a^2+(a^2+b^2)x^2}$$

$$=\frac{a}{(a^2+b^2)}\int_0^\infty\frac{adx}{\frac{a^2}{a^2+b^2}+x^2}$$

$$=\frac{a}{(a^2+b^2)}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left[\tan^{-1}\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right]_0^\infty=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

وعليه نجد أن :

$$\int_0^\infty e^{-ax}\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(bx\sin\theta)d\theta\}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (٥,٧٧)$$

باستخدام العلاقة $J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(n\theta-x\sin\theta)d\theta$

وعند $n=0$ والتعويض عن x بالمقدار bx ، ينتج أن :

$$J_0(bx)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(bx\sin\theta)d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(bx\sin\theta)d\theta$$

وعليه فإن : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(bx\sin\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}J_0(bx)$

باستخدام هذه العلاقة في المعادلة (٥,٧٧) نحصل على :

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cdot J_0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \qquad (a>0) \tag{٥,٧٨}$$

ملاحظة: يمكن استنتاج حالات خاصة هامة من تكامل لبتشز ومنها :

(أ) عندما $a \to 0$ نجد أن :

$$\int_0^\infty J_0(bx)dx = \frac{1}{b} \tag{٥,٧٩}$$

(ب) عندما $b=1$ نجد أن :

$$\int_0^\infty J_0(x)dx = 1 \tag{٥,٨٠}$$

وتتضح أهمية تكامل لبتشز في الحالات التالية :

مبرهنة(٩)

إذا كان n عدداً صحيحاً غير سالب ، فإن :

$$\int_0^\infty J_n(bx)dx = \frac{1}{b} \tag{٥,٨١}$$

البرهان

يعتمد هذا البرهان على العلاقة (٥,٨٠) وعلى العلاقات التكرارية الخاصة بدوال بسل حيث إن :

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n}J_n(x)\} = -x^{-n}J_{n+1}(x)$$

عند وضع $n=0$ ، نجد أن :

$$\frac{d}{dx}\{J_0(x)\} = -J_1(x)$$

وبإجراء التكامل مع التعويض عن x بالمقدار bx ، نجد أن :

$$\int_0^\infty J_1(bx)\,d(bx) = -\lim_{a\to\infty}\left[J_0(x)\right]_0^a = J_0(0) - \lim_{a\to\infty}\left[J_0(a)\right]$$

لكن $J_0(0)=1,\ \lim_{a\to\infty} J_0(a)=0$. إذاً

$$\int_0^\infty J_1(bx)dx = \frac{1}{b} \qquad (٥,٨٢)$$

ومن تكامل العلاقة $J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]$

ينتج أن :

$$\left[J_n(x)\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right]dx$$

وعندما تكون $n>0$ نجد أن $\lim_{x\to\infty} J_n(x)=0,\ J_n(0)=0$ وعليه

$$\int_0^\infty J_{n+1}(x)dx = \int_0^\infty J_{n-1}(x)dx \qquad (٥,٨٣)$$

وتكون هذه العلاقة صحيحة لجميع قيم $n>0$ وعليه إذا كان $n=2$ ، فإن :

$$\int_0^\infty J_3(bx)dx = \int_0^\infty J_1(bx)dx = \frac{1}{b}$$

وتبقى العلاقة صحيحة لجميع القيم.

مبرهنة(١٠)

$$(1)\quad \int_0^\infty J_n(bx)x^n e^{-ax}dx = \frac{2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{b^n}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad (٥,٨٤)$$

$$(2)\quad \int_0^\infty J_n(bx)x^{n+1} e^{-ax}dx = \frac{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{ab^n}{(a^2+b^2)^{n+\frac{3}{2}}} \qquad a>0\ (٥,٨٥)$$

البرهان

باستخدام العلاقة :

$$J_n(bx)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}(\frac{bx}{2})^{2r+n}$$

فإننا نحصل على :

$$(1)\quad \int_0^{\infty}J_n(bx)x^n e^{-ax}dx=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(n+r+1)}(\frac{b}{2})^{2r+n}\int_0^{\infty}e^{-ax}x^{2r+2n}dx\ (\diamond)$$

وحيث إن :

$$\int_0^{\infty}e^{-ax}x^{2r+2n}dx=\frac{1}{a^{2r+2n+1}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{(2r+2n+1)-1}dt=\frac{\Gamma(2r+2n+1)}{a^{2r+2n+1}}$$

تصبح العلاقة ($\diamond$) كالآتي :

$$\int_0^{\infty}J_n(bx)x^n e^{-ax}dx=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\Gamma(2r+2n+1)}{r!\Gamma(n+r+1)}(\frac{b}{2})^{2r+n}\cdot\frac{1}{a^{2r+2n+1}}$$

لكن

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n),\qquad \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)}=\Gamma(x+\tfrac{1}{2})\cdot\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}$$

إذاً وعليه يصبح الطرف الأيسر في العلاقة الأولى كالآتي :

$$\int_0^{\infty}J_n(bx)x^n e^{-ax}dx=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{2\Gamma(2r+2n)}{r!\Gamma(r+n)}(\frac{b}{2})^{2r+n}\cdot\frac{1}{a^{2r+2n+1}}$$

وباستخدام العلاقة الثانية نحصل على :

$$\int_0^{\infty}J_n(bx)x^n e^{-ax}dx=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\Gamma(r+n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}r!}\cdot\frac{2^{2r+2n}}{a^{2r+2n+1}}(\frac{b}{2})^{2r+n}$$

$$=\frac{2^n b^n}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\Gamma(r+n+\frac{1}{2})}{r!a^{2r+2n+1}}\cdot b^{2r}$$

وعليه فإن :

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^n e^{-ax}dx = \frac{2^n b^n}{\sqrt{\pi}a^{2n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\Gamma(r+n+\frac{1}{2})}{r!}(\frac{b^2}{a^2})^r \quad (❖❖)$$

وحيث إن :

$$\frac{1}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{2n+1}}\left[1+\frac{b^2}{a^2}\right]^{-n-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^{2n+1}}\{1+(-n-\tfrac{1}{2})(\frac{b^2}{a^2}) + \frac{(-n-\frac{1}{2})(-n-\frac{3}{2})}{2!}(\frac{b^2}{a^2})^2 + \cdots$$

$$+ \frac{(-n-\frac{1}{2})(-n-\frac{3}{2})\cdots(-n-\frac{1}{2}-r+1)}{r!}(\frac{b^2}{a^2})^r + \cdots\}$$

إذاً

$$\frac{1}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{2n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})\cdots(n+r-\frac{1}{2})}{r!}(\frac{b^2}{a^2})^r$$

بضرب طرفي العلاقة السابقة في المقدار $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ ، ينتج أن

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{(a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{2n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})\cdots(n+r-\frac{1}{2})}{r!}(\frac{b^2}{a^2})^r$$

$$= \frac{1}{a^{2n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\Gamma(n+r+\frac{1}{2})}{r!}(\frac{b^2}{a^2})^r \qquad (***)$$

ومن (❖❖❖) و (❖❖) ينتج المطلوب.

وللحصول على العلاقة (٥,٨٥) نشتق طرفي العلاقة (٥,٨٤) بالنسبة إلى a (اعتداد بأنها دالة في a) فنحصل على الآتي :

$$\int_0^\infty (-x)J_n(bx)x^n e^{-ax}dx = \frac{-2^n\,\Gamma(n+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})(2a)b^n}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^{n+1}e^{-ax}dx = \frac{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{3}{2})ab^n}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

وتتضح أيضاً أهمية تكامل لبتشز في إيجاد العلاقات التالية حيث

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

بوضع ia بدلاً من a نجد أن :

$$\int_0^\infty e^{-iax}J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

(أ) عندما تكون $b > a$ نحصل على الآتي:

$$\int_0^\infty (\cos ax - i\sin ax)J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

ومنه

$$\int_0^\infty \cos ax \cdot J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \qquad (b>a) \quad (٥,٨٦)$$

$$\int_0^\infty \sin ax \cdot J_0(bx)dx = 0 \qquad (b>a) \quad (٥,٨٧)$$

(ب) أما إذا كان $b < a$ فإننا نحصل على الآتي:

$$\int_0^\infty \cos ax \cdot J_0(bx)dx = 0 \qquad (b<a) \quad (٥,٨٨)$$

$$\int_0^\infty \sin ax \cdot J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad (b<a) \quad (٥,٨٩)$$

أيضاً يمكن للدارس استنباط العلاقتين الهامتين الآتيتين :

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^{n+1}\exp(-ax^2)dx=\frac{b^2}{(2a)^{n+1}}\exp(\frac{-b^2}{4a})$$

$$\int_0^\infty J_n(bx)x^{n+2}\exp(-ax^2)dx=\frac{b^2}{2^{n+1}a^{n+2}}(n+1-\frac{b^2}{4a})\exp(\frac{-b^2}{4a}) \quad (٥.٩٠)$$

• تكاملات لوميل **Lommel Integrals**

للحصول على علاقات تكاملية للوميل نستخدم المعادلتين التفاضليتين الآتيتين :

$$x^2u''+xu'+(\lambda^2x^2-n^2)u=0,\quad u(x)=J_n(\lambda x)$$

$$x^2v''+xv'+(\mu^2x^2-n^2)v=0,\quad v(x)=J_n(\mu x)$$

بحذف n^2 من المعادلتين نحصل على :

$$x^2(vu''-uv'')+x(u'v-v'u)+(\lambda^2-\mu^2)x^2uv=0$$

ومنها نجد أن :

$$x(vu''-uv'')+x(u'v-v'u)+(\lambda^2-u^2)xuv=0$$

والتي يمكن كتابتها على الشكل الآتي :

$$\frac{d}{dx}\{x(u'v-v'u)\}+(\lambda^2-\mu^2)xuv=0$$

بتكامل الطرفين على $[0,a]$ نحصل على الآتي :

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_0^a xuvdx=\left[x(uv'-uv')\right]_0^a$$

ومنها نحصل على :

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_0^a xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)dx$$
$$=a[\mu J_n(\lambda a)J_n'(\mu a)-\lambda J_n'(\lambda a)J_n(\mu a)] \quad (٥.٩١)$$

فإذا كان λ,μ جذرين مختلفتين للمعادلة $J_n(\gamma a)=0$ فإن :

$$\int_0^a xJ_n(\lambda x)J_n(\mu x)dx = 0 \qquad (\lambda \neq \mu) \qquad (٥,٩٢)$$

أما إذا كان $\mu = \lambda$ فإننا نحصل على المعادلة التفاضلية :

$$x^2u'' + xu' + (\lambda^2x^2 - n^2)u = 0$$

بالضرب في المقدار $2u'$ نجد أن :

$$2x^2u''u' + 2xu'^2 + 2(\lambda^2x^2 - n^2)uu' = 0$$

والتي قد تكتب على الشكل :

$$\frac{d}{dx}\{x^2u'^2 - n^2u^2 + \lambda^2x^2u^2\} - 2\lambda^2xu^2 = 0$$

بإجراء التكامل بعد وضع $u = J_n(\lambda x)$ نجد أن :

$$\left[x^2\{\frac{d}{dx}J_n(\lambda x)\}^2 - n^2\{J_n(\lambda x)\}^2 + \lambda^2x^2\{J_n(\lambda x)\}^2\right]_0^a = 2\lambda^2\int_0^a x\{J_n(\lambda x)\}^2 dx$$

وحيث إن $nJ_n(0) = 0, J_n(\lambda a) = 0$. إذاً :

$$\left[a^2\left\{\frac{d}{dx}J_n(\lambda x)\right\}^2\right]_{x=a} = 2\lambda^2\int_0^a x\{J_n(\lambda x)\}^2 dx \quad (\clubsuit)$$

لكن

$$\frac{d}{dx}J_n(x) = \frac{n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x)$$

إذاً بوضع λx بدلاً من x في العلاقة السابقة نحصل على :

$$\frac{d}{d(\lambda x)}J_n(\lambda x) = \frac{n}{\lambda x}J_n(\lambda x) - J_{n+1}(\lambda x)$$

والتي قد تكتب على الشكل :

$$\frac{d}{dx}J_n(\lambda x) = \frac{n}{x}J_n(\lambda x) - \lambda J_{n+1}(\lambda x)$$

باستخدام هذه العلاقة في (❖) نجد أن :

$$a^2\left\{\frac{n}{a}J_n(\lambda a)-\lambda J_{n+1}(\lambda a)\right\}^2 = 2\lambda^2\int_0^a x\{J_n(\lambda x)\}^2\,dx \qquad (٥,٩٣)$$

وحيث إن $J_n(\lambda a)=0$ ، إذاً

$$\int_0^a x\{J_n(\lambda x)\}^2\,dx = \frac{a^2}{2}\{J_{n+1}(\lambda a)\}^2 \qquad (٥,٩٤)$$

في الحالة التي فيها $J_n(\gamma a)=0$ عندما يكون $\mu=\gamma,\ \lambda=\gamma$ جذوراً لها تسمى العلاقتان (٥,٩٤)، (٥,٩٢) بالمعيارية المتعامدة.

أما إذا كان $J_n(\gamma a)\neq 0$ ، فتسمى العلاقتان(٥,٩٣)، (٥,٩١) تكاملات لوميل.

• **متسلسلة فورير (فورييه)– بسل Fourier – Bessel series**

أثبتنا فيما سبق أنه إذا كان $\lambda=\gamma_r$ ، $\mu=\gamma_s$ حيث γ_s ، γ_r جذرا المعادلة $J_n(\gamma a)=0$ فإننا نحصل على العلاقتين (٥,٩٤)، (٥,٩٢) وعليه يمكن القول إن الدالتين $\sqrt{x}\,J_m(x),\ \sqrt{x}J_n(\lambda x)$ متعامدتان على الفترة $[0,a]$ وهذا يعني أن

$$\int_0^a \sqrt{x}\,J_n(\lambda x)\sqrt{x}\,J_m(\lambda x)\,dx = \begin{cases} 0 & m\neq n \\ \dfrac{a^2}{2}\left[J_{n+1}(\lambda a)\right]^2 & m=n \end{cases}$$

ولإيضاح أهمية هذه العلاقة نذكر الآتي :

مبرهنة(١١)

إذا كانت $f(x)$ معرفة في المنطقة $0\le x\le a$ فإنه يمكن كتابتها على الصورة :

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\lambda_i x) \qquad (٥,٩٥)$$

حيث λ_i تمثل جذور المعادلة $J_n(\lambda x)=0$ وقيمة c_i تعين من الآتي :

$$c_i = \frac{2\int_0^a x \cdot f(x) J_n(\lambda_i x) dx}{a^2 \{J_{n+1}(\lambda_i a)\}^2} \tag{٥,٩٦}$$

البرهان

بما أن :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\lambda_i x)$$

إذاً

$$x \cdot f(x) J_n(\lambda_j x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x \cdot J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_j x)$$

وعليه فإن :

$$\int_0^a x \cdot f(x) J_n(\lambda_i x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_0^a x \cdot J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_j x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{a^2}{2} \{J_{n+1}(\lambda_i a)\}^2 \delta_{ij} = c_i \frac{a^2}{2} \{J_{n+1}^2(\lambda_i a)\}$$

ومنها ينتج المطلوب.

مثال(١)

إذا كان $r = 1, 2, 3, \cdots$ ، λ_r تمثل جذوراً موجبةً للمعادلة $J_0(\lambda_r) = 0$

فأثبت أن :

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_r x)}{\lambda_r J_1(\lambda_r)} = \frac{1}{2} \qquad 0 \le x \le 1 \tag{٥,٩٧}$$

الإثبات

باستخدام تمثيل فورير- بسل :

$$f(x)=\sum_{r=1}^{\infty}c_r J_n(\lambda_r x)$$

حيث

$$c_r=\frac{2}{a^2 J_{n+1}^2(\lambda_r a)}\int_0^a x\cdot f(x)J_n(\lambda_r x)dx$$

عند وضع $n=0$ ، $a=1$ ، $f(x)=1$ نجد أن :

$$c_r=\frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_r)}\int_0^1 x\cdot J_0(\lambda_r x)dx$$

بفرض $\lambda_r x=t$ فإن $\lambda_r dx=dt$ وعليه :

$$\int_0^1 x\cdot J_0(\lambda x)dx=\int_0^{\lambda_r}\frac{t}{\lambda_r}J_0(t)\frac{dt}{\lambda_r}=\frac{1}{\lambda_r^2}\int_0^{\lambda_r}t\,J_0(t)dt$$

$$=\frac{1}{\lambda_r^2}\{t\,J_1(t)\}_0^{\lambda_r}=\frac{1}{\lambda_r}J_1(\lambda_r)$$

وعليه نجد أن قيمة c_r كالآتي :

$$c_r=\frac{2}{J_1^2(\lambda_r)}\cdot\frac{1}{\lambda_r}J_1(\lambda_r)=\frac{2}{\lambda_r J_1(\lambda_r)}$$

وعليه نحصل على الآتي :

$$\frac{1}{2}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_r x)}{\lambda_r J_1(\lambda_r)}$$

والآن إلى المبرهنة الآتية.

مبرهنة(١١)

"تكاملات تحتوي على دالة بسل" إذا كان $n > m > -1$ ، فإن

$$J_n(x) = \frac{2(x/2)^{n-m}}{\Gamma(n-m)} \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{m+1} J_m(xt)\, dt \qquad (٥.٩٨)$$

البرهان افرض أن

$$I = \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{m+1} J_m(xt) dt$$

نجد أن :

$$I = \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{m+1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\frac{xt}{2})^{2r+m}}{r!\Gamma(m+r+1)} dt$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\frac{x}{2})^{2r+m}}{r!\Gamma(m+r+1)} \int_0^1 (1-t^2)^{n-m-1} t^{2m+2r+1} dt$$

إذاً بوضع $t^2 = u$ نجد أن :

$$I = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\frac{x}{2})^{2r+m}}{2r!\Gamma(m+r+1)} \int_0^1 (1-u)^{n-m-1} u^{m+r} du$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\frac{x}{2})^{2r+m}}{2r!\Gamma(m+r+1)} \cdot \beta(n-m, m+r+1)$$

من خواص دالة بيتا نجد أن $n-m > 0$, $m+r+1 > 0$ وعليه تكون قيمة r محصورة بين الصفر وما لانهاية ، ومنه نجد أن :

$$I=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(\frac{x}{2})^{2r+m}}{2r!\Gamma(m+r+1)}\cdot\frac{\Gamma(n-m)\Gamma(m+r+1)}{\Gamma(n+r+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma(n-m)\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(\frac{x}{2})^{2r+m}}{r!\Gamma(n+r+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma(n-m)(\frac{x}{2})^{m-n}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(\frac{x}{2})^{2r+n}}{r!\Gamma(n+r+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma(n-m)(\frac{x}{2})^{m-n}J_n(x)$$

ومنها نحصل على المطلوب.

مبرهنة(١٢)

"تكاملات خاصة بدالة بسل المعدلة"

إذا كان $n>-\frac{1}{2}$ ، فإن:

$$(1)\ I_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(n+\frac{1}{2})}(\frac{x}{2})^n\int_{-1}^{1}e^{-xt}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}dt \quad (٥,٩٩)$$

$$(2)\ K_n(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}(\frac{x}{2})^n\int_{1}^{\infty}e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}dt \quad (٥,١٠٠)$$

البرهان

باستخدام العلاقة (٥,٢٩)

$$J_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(n+\frac{1}{2})}(\frac{x}{2})^n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{ixt}dt$$

والعلاقة

$$\left(I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)\right) \quad (٥,٥٨)$$

يمكن الحصول، بعد التعويض عن x بالمقدار ix ، على الآتي :

$$I_n(x)=\frac{i^{-n}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{ix}{2}\right)^n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{-xt}\,dt \qquad \left(n>-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{-xt}\,dt$$

وبذلك قد أثبت الجزء الأول، ولإثبات الجزء الثاني انظر [١٢] ص١١٩.

تمــارين

١- إذا كانـت λ_r تحقـق المعادلـة $J_1(\lambda_r)=0,\ r=1,\ 2,\cdots$ ، أثبـت أن

$$\frac{1}{2}x=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_r x)}{\lambda_r J_2(\lambda_r)} \qquad 0<x<1$$

٢- إذا كانت λ_r هي جذور المعادلة $J_0(\lambda_r)=0,\ r\geq 1$ فأثبت أن :

$$\frac{1}{8}(1-x^2)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_r x)}{\lambda_r^2 J_1(\lambda_r)}$$

٣- إذا كانـت λ_r جـذور المعادلـة ، $J_1(\lambda_r)=0,\ r\geq 1$ أثبـت صـحة الآتي :

(أ) $$x^2=\frac{1}{2}+4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_r x)}{\lambda_r^2 J_0(\lambda_r)}$$

(ب) $$(1-x^2)^2=\frac{1}{2}-64\sum_{r=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_r x)}{\lambda_r^4 J_0(\lambda_r)}$$

(٥,٨) دوال أخرى مرتبطة بدوال بسل

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة بعض الدوال المرتبطة بدالة بسل مثل دالة كلفن، ودالتي بيرويبا ودوال بسل الكروية، دوال هنكل الكروية، ونبدأ بالآتي:

أولاً: دوال كلفن Kelvin's Functions

تسمى المعادلة التفاضلية:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(ik^2x^2+n^2)y=0 \qquad (٥,١٠١)$$

وهي أحد أشكال دالة بسل المعدلة:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(\lambda^2x^2+n^2)y=0$$

وذلك عند وضع $\lambda^2=ik^2$. وحيث إن معادلة بسل المعدلة لها الحل

$$y=AI_n(\lambda x)+BK_n(\lambda x)$$

إذاً حل معادلة كلفن على الصورة:

$$y=AI_n(i^{\frac{1}{2}}kx)+BK_n(i^{\frac{1}{2}}kx) \qquad (٥,١٠٢)$$

وحيث إن $I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$ وبتعويض x بالمقدار $i^{\frac{1}{2}}kx$ نجد أن $I_n(i^{\frac{1}{2}}kx)=i^{-n}J_n(i^{\frac{3}{2}}kx)$ يكون للمعادلة (٥,١٠١) الحلان المستقلان $J_n(i^{\frac{3}{2}}kx)$ و $K_n(i^{\frac{1}{2}}kx)$ ومن الواضح أنه إذا كانت x حقيقية فإنه ليس بالضرورة أن يكون هذان الحلان حقيقيين، ويكون حل معادلة كلفن على الصورة:

$$y=Ai^{-n}J_n(i^{\frac{3}{2}}kx)+BK_n(i^{\frac{1}{2}}kx) \qquad (٥,١٠٣)$$

ثانياً: دالة بير ودالة بيا Ber and Bei Functions

في معادلة كلفن العامة ضع $n=0$ و $k=1$ لتحصل على المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-iy=0 \qquad (٥,١٠٤)$$

ويكون حلها على الصورة :

$$y = AJ_0(i^{\frac{3}{2}}x) + BK_0(i^{\frac{1}{2}}x) \qquad (٥,١٠٥)$$

وعليه يتضح أن سعة K_n, J_n دائماً مركبة لجميع قيم n, x, k الحقيقية ولقد وضع كلفن التعريفات الآتية :

$$ber_n(x) = \mathrm{Re} J_n(i^{\frac{3}{2}}x), \quad bei_n(x) = \mathrm{Im} J_n(i^{\frac{3}{2}}x)$$

فيكون :

$$J_n(i^{\frac{3}{2}}x) = ber_n(x) + i bei_n(x) \qquad (٥,١٠٦)$$

كما أن :

$$\ker_n(x) = \mathrm{Re}\, i^{-n} K_n(i^{\frac{1}{2}}x),$$

$$kei_n(x) = \mathrm{Im}\, i^{-n} K_n(i^{\frac{1}{2}}x)$$

بحيث إن :

$$i^{-n} K_n(i^{\frac{1}{2}}x) = \ker_n(x) + i kei_n(x) \qquad (٥,١٠٧)$$

وعليه يكون :

$$y = A_1(ber_n(kx) + i bei_n(kx)) + A_2(\ker_n(kx) + kei_n(kx)) \qquad (٥,١٠٨)$$

عند وضع $n = 0$ في المعادلة (٥,١٠٦) نجد أن

$$ber(x) + i bei(x) = I_0(i^{\frac{1}{2}}x)$$

$$\ker(x) + i kei(x) = K_0(i^{\frac{1}{2}}x)$$

وحيث إن :

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

$$I_0(i^{\frac{1}{2}}x) = 1 + i\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - i\frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

إذاً :

$$ber(x) = 1 - \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(x/2)^8}{(4!)^2} - \cdots$$

$$bei(x) = \frac{(x/2)^2}{(1!)^2} - \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \frac{(x/2)^{10}}{(5!)^2} - \cdots$$

ثالثاً: دوال بسل الكروية

في معادلة بسل العامة :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1-2\alpha}{x}\frac{dy}{dx} + (\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2 - n^2\gamma^2}{x^2})y = 0$$

والتي حلها

$$y(x) = x^{\alpha}\left[AJ_n(x) + BY_n(x)\right], \qquad n \text{ عدد صحيح}$$

$$y(x) = x^{\alpha}\left[AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)\right], \qquad n \text{ عدد غير صحيح}$$

افـرض أن $1-2\alpha=2$, $\gamma=1$, $\beta^2\gamma^2 = k^2$, $\alpha^2 - n^2\gamma^2 = -l(1+l)$ ، نجـد أن $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = k$, $\gamma = 1$, $n = l + \frac{1}{2}$ وبـذلك تتحـول معادلـة بـسل العامـة إلى المعادلة :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \{k^2x^2 - l(l+1)\}y = 0 \qquad (٥,١٠٩)$$

ويكون الحل العام للمعادلة (٥,١٠٩) على الصورة :

$$y = Ax^{\frac{-1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(kx) + Bx^{\frac{-1}{2}}Y_{l+\frac{1}{2}}(kx) \qquad (٥,١١٠)$$

فإذا عرّفنا دالتي بسل الكروية $y_l(x), j_l(x)$ كالآتي:

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x), \tag{٥,١١١}$$

$$y_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{l+\frac{1}{2}}(x) \tag{٥,١١٢}$$

فإن المعادلة (٥,١١٠) تصبح على الشكل

$$y=A_1 j_l(x)+A_2 y_l(x) \tag{٥,١١٣}$$

حيث $A_1=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\cdot A \quad , \quad A_2=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\cdot B$

رابعاً: دوال هنكل الكروية:

يمكن تعريف دوال هنكل الكروية كالآتي:

$$h_l^{(1)}(x)=j_l(x)+iy_l(x), \tag{٥,١١٤}$$

$$h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-iy_l(x) \tag{٥,١١٥}$$

ويمكن إثبات المبرهنة الآتية بسهوله.

مبرهنة(١٣)

الدوال $j_n(x), y_n(x), h_n^{(1)}(x), h_n^{(2)}(x)$ تحقق الآتي:

a) $\frac{d}{dx}\left\{x^{n+1}N_n(x)\right\}=x^{n+1}N_{n-1}(x)$

b) $\frac{d}{dx}\left\{x^{-n}N_n(x)\right\}=-x^{-n}N_{n+1}(x)$

c) $N_n'(x)=N_{n-1}(x)-\frac{n+1}{x}N_n(x)$ (٥,١١٦)

d) $N'_n(x) = \frac{n}{x} N_n(x) - N_{n+1}(x)$

e) $(2n+1)N'_n(x) = nN_{n-1}(x) - (n+1)N_{n+1}(x)$

f) $N_{n-1}(x) + N_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} N_n(x)$

حيث $N_n(x)$ هي إحدى الدوال السالفة الذكر.

وفي ما يلي بعض الأمثلة

مثال(١)

أثبت أن

$$(1)\ J_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad (2)\ y_0(x) = \frac{-\cos x}{x} \qquad (٥,١١٧)$$

الإثبات:

من المعادلة (٥,١١٢)

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

وبوضع $l = 0$، نجد أن :

$$j_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(\frac{1}{2}+r+1)} (\frac{x}{2})^{2r+\frac{1}{2}}$$

ومما سبق وجدنا أن (علاقة لجندر)

$$\Gamma(2l) = \frac{2^{2l-1}\Gamma(l)\Gamma(l+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

أو

$$\Gamma(r+1+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2r+2)!}{2^{2r+2}(1+r)!}\sqrt{\pi}$$

ومنه لدينا :

$$j_0(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{2^{2r+2}(r+1)!}{r!(2r+2)!}\cdot\frac{x^{2r+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\cdot 2^{2r+\frac{1}{2}}}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{2(r+1)}{(2r+2)!}\cdot x^{2r}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{2(r+1)x^{2r}}{(2r+2)(2r+1)!}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}=\frac{\sin x}{x}$$

ولإثبات (٢) نستخدم المعادلة (٥،١١٢)

$$y_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,Y_{l+\frac{1}{2}}(x)$$

وعند وضع $l=0$

$$y_0(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,Y_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\left[\cos\tfrac{\pi}{2}\cdot J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)\right]$$

نجد أن :

$$y_0(x)=-\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{-\frac{1}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!\Gamma(-\frac{1}{2}+r+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-\frac{1}{2}}$$

وحيث إن :

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}+r+1)=\Gamma(r+\tfrac{1}{2})=\frac{(2r)!}{2^{2r}r!}\sqrt{\pi}$$

فإن :

$$y_0(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2^{2r}\, r!}{r!(2r)!\sqrt{\pi}} \frac{x^{2r-\frac{1}{2}}}{2^{2r-\frac{1}{2}}}.$$

$$= -\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r-1}}{(2r)!} = -\frac{1}{x} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!} = -\frac{\cos x}{x}$$

وهو المطلوب.

مثال(٢)

أثبت أن :

$$(1)\ h_0^{(1)}(x) = -i\frac{e^{ix}}{x}\ , \qquad (2)\ h_0^{(2)}(x) = i\frac{e^{-ix}}{x} \qquad (٥.١١٨)$$

الإثبات: لإثبات (١) نستخدم التعريف الآتي :

$$h_0^{(1)}(x) = j_0(x) + iy_0(x)$$

وباستخدام المعادلة (٥.١١٧) نجد أن

$$h_0^{(1)}(x) = \frac{1}{x}\sin x - i\frac{1}{x}\cos x = -\frac{i}{x}(\cos x + i\sin x) = -i\frac{e^{ix}}{x}$$

ولإثبات (٢)، لاحظ أن

$$h_0^{(2)}(x) = j_0(x) - iy_0(x)$$

$$= \frac{1}{x}\sin x + i\frac{1}{x}\cos x = \frac{i}{x}(\cos x - i\sin x) = i\frac{e^{-x}}{x}$$

مبرهنة(١٤) "صيغ ريلاخ Rayleighs Formulas "

إذا كان n عدداً صحيحاً غير سالب فإن

$$(1)\ j_n(x)=(-1)^n x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$(2)\ y_n(x)=-(-1)^n x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$(3)\ h_n^1(x)=-i(-1)^n x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{e^{ix}}{x}\right)$$

$$(4)\ h_n^2(x)=i(-1)^n x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{e^{-ix}}{x}\right) \qquad (٥,١١٩)$$

يمكن إثبات هذه المبرهنة بالاستقراء الرياضي ويترك للقارئ.

ملاحظة: يمكن باستخدام المبرهنة(١٤) الحصول على قيم دوال بسل الكروية بتكامل الرتبة طبقاً للأتي :

$$j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}$$

$$j_2(x)=\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\sin x-\frac{3}{x^2}\cos x$$

$$j_3(x)=\left(\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^2}\right)\sin x-\left(\frac{15}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cos x, \qquad (٥,١٢٠)$$

$$y_1(x)=-\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}$$

$$y_2(x)=-\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cos x-\frac{3}{x^2}\sin x,$$

$$y_3(x) = -\left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right)\cos x - \left(\frac{15}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x \qquad (٥,١٢١)$$

(٥,٩) دراسة أوضاع سعة دوال بسل لقيم صغيرة وكبيرة جداً

من المعادلة (٥,١٠٠) والتي على الصورة :

$$K_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_1^\infty e^{-xt}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} dt$$

ويفرض أن :

$$t = 1 + \frac{u}{x} \quad , \; dt = \frac{1}{x} du$$

$$t = 0 \Rightarrow u = 0 \qquad\qquad t = \infty \Rightarrow u = \infty$$

نجد أن :

$$K_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^\infty e^{-(x+u)}\left(\frac{u^2}{x^2} + \frac{2u}{x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} du$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n e^{-x}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{2x}+1\right)^{n-\frac{1}{2}} \cdot u^{n-\frac{1}{2}} du$$

$$= \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,\frac{e^{-x}}{x\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-u}u^{n-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du$$

وعندما تكون x كبيرة فإن $\frac{u}{2x}$ تصبح صغيرة ، وعليه $(1+\frac{u}{2x})^{n-\frac{1}{2}} \to 1$ وبناء على ذلك نجد أن :

$$K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\frac{e^{-x}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\int_0^\infty e^{-u}u^{n-\frac{1}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\frac{e^{-x}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \cdot \Gamma(n+\tfrac{1}{2})$$

وعليه نحصل على :

$$K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\; e^{-x} \qquad (٥,١٢٢)$$

ولدراسة تصرف دالة هنكل نستخدم المعادلة (٥,٦٢) التالية :

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(x)$$

ونعّرف الآتي :

$$i^{n+1} = \exp i\frac{\pi}{2}(n+1), \quad i = \sqrt{-1}$$

فنجد أن :

$$H_n^{(1)}(ix) = \frac{2}{\pi}\exp\left\{\left(\frac{-i\pi}{2}\right)(n+1)\right\}K_n(x)$$

وبالتعويض عن x بالمقدار $-ix$ نحصل على :

$$H_n^{(1)}(x) = \frac{2}{\pi}\exp\left\{\left(\frac{-i\pi}{2}\right)(n+1)\right\}K_n(-ix)$$

باستخدام العلاقة (٥,١٢٢):

$$H_n^{(1)}(x) \approx \frac{2}{\pi}\exp\left\{\left(\frac{-i\pi}{2}\right)(n+1)\right\}\left(\frac{\pi}{-2ix}\right)^{\frac{1}{2}} e^{ix}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-i\right)^{\frac{-1}{2}} \exp\left\{\left(\frac{-i\pi}{2}\right)(n+1)\right\}e^{ix}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} \exp\left\{\left(\frac{-i\pi}{2}\right)(n+1)\right\}e^{ix}, \quad -i = e^{\frac{-i\pi}{2}}$$

ويكون تصرف دالة هنكل عندما تكون x كبيرة كالآتي :

$$H_n^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left\{ x - \frac{\pi}{2}(n+\tfrac{1}{2}) \right\} \right] \qquad (٥,١٢٣)$$

ولدراسة دالة هنكل- بسل الثانية $H_n^{(2)}(x)$ حيث إن :

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x), \qquad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

وعليه يكون $H_n^{(2)}(x)$ هو المرافق للمقدار $H_n^{(1)}(x)$ أو بتعبير آخر

$$H_n^{(2)}(x) = \left\{ H_n^{(1)}(x) \right\}^*$$

ومن ذلك نحصل على :

$$H_n^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left\{ x - \frac{\pi}{2}(n+\frac{1}{2}) \right\} \right] \qquad (٥,١٢٤)$$

ومن ذلك يمكن إيجاد تصرف دالة بسل من النوع الأول كالآتي :

$$J_n(x) = \operatorname{Re} H_n^{(1)}(x)$$

$$J_n(x) \approx \operatorname{Re} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left\{ x - \frac{\pi}{2}(n+\frac{1}{2}) \right\} \right]$$

ومن ثم نجد أن :

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left\{ x - \frac{\pi}{2}(n+\frac{1}{2}) \right\} \qquad (٥,١٢٥)$$

بالمثل يكون تصرف دالة بسل من النوع الثاني :

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left\{ x - \frac{\pi}{2}(n+\frac{1}{2}) \right\} \qquad (٥,١٢٦)$$

وباستخدام العلاقة (٥,٥٨) $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$

نتبع الآتي :

$$I_n(x) \approx i^{-n} \sqrt{\frac{2}{\pi i x}} \cos\left\{ix - \frac{\pi}{2}(n+\frac{1}{2})\right\}$$

$$= i^{-n-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{1}{2}\left[\exp\left\{-x - \frac{i\pi}{2}(n+\frac{1}{2})\right\} + \exp\left\{x + \frac{i\pi}{2}(n+\frac{1}{2})\right\}\right]$$

$$= i^{-n-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{x + \frac{i\pi}{2}(n+\frac{1}{2})\right\}, \qquad \exp\frac{i\pi}{2}(n+\frac{1}{2}) = i^{n+\frac{1}{2}}$$

إذاً

$$I_n(x) \approx i^{-n-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \cdot i^{n+\frac{1}{2}}$$

ومنها يمكن القول عندما $x \to \infty$ تتصرف الدالة $I_n(x)$ كالآتي :

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \tag{٥,١٢٧}$$

وباستخدام العلاقة : $j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$

نجد أن : $j_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left\{x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right\}$

وعليه فإن :

$$j_n(x) \approx \frac{1}{x} \sin(x - \frac{n\pi}{2}) \tag{٥,١٢٨}$$

وحيث إنه من المعادلة (٥,١١٢)

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left\{x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right\}$$

ومنها نجد أن :

$$y_n(x) \approx -\frac{1}{x}\cos(x-\frac{n\pi}{2}) \qquad (٥,١٢٩)$$

وباستخدام المعادلة (٥,١١٤)

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x) \approx \frac{1}{x}\sin(x-\frac{n\pi}{2}) - \frac{i}{x}\cos(x-\frac{n\pi}{2})$$

$$= -\frac{i}{x}\left\{\cos(x-\frac{n\pi}{2}) + i\sin(x-\frac{n\pi}{2})\right\}$$

ويمكن الحصول على :

$$h_n^{(1)}(x) \approx \frac{-i}{x}\exp\left[i\left\{x-\frac{n\pi}{2}\right\}\right] \qquad (٥,١٣٠)$$

وبأخذ المرافق نحصل على :

$$h_n^{(2)}(x) \approx \frac{i}{x}\exp\left[-i\left\{x-\frac{n\pi}{2}\right\}\right] \qquad (٥,١٣١)$$

وبعدما درسنا فيما سبق تصرف الدوال عند $x \to \infty$ ، ندرس الآن تصرف الدوال عند $x \to 0$.

• **عندما $x \to 0$ فإن**

$$J_n(x) \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (٥,١٣٢)$$

من دراستنا لمفكوك دالة بسل $J_n(x)$ نجد أقل قوى إلى x تكون عندما $r=0$ وعليه تتحقق العلاقة (٥,١٣٢).

ولدراسة تصرف الدالة $Y_n(x)$ عندما $x \to 0$ نتذكر العلاقة

$$Y_n(x) = \frac{\cos n\pi\, J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

وتكون أقل قوى x عند $J_{-n}(x)$ عندما $r \to 0$ وعليه

$$Y_n(x) \approx -\frac{1}{\sin n\pi} \cdot \frac{1}{\Gamma(-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}$$

وعليه باستخدام العلاقة :

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

نجد أن :

$$Y_n(x) \approx -\frac{\Gamma(n)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n \qquad (n \neq 0) \quad (٥,١٣٣)$$

وعندما $n = 0$ نجد أن :

$$Y_n(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln x \qquad (٥,١٣٤)$$

ولدراسة تصرف $j_n(x)$ نستخدم العلاقة :

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{1}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} x^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\, x^n}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}}$$

وعليه يمكن الحصول على العلاقة :

$$j_n(x) \approx \frac{x^n}{(2n+1)!} \qquad (٥,١٣٥)$$

أيضاً يكون تصرف الدالة $y_n(x)$ معتمداً على العلاقة :

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left\{ -\frac{1}{\pi} \Gamma(n+\frac{1}{2}) \left(\frac{2}{x}\right)^{n+\frac{1}{2}} \right\}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{x^{n+1}}\Gamma(n+\frac{1}{2})$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\frac{2^n}{x^{n+1}}(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{\pi}}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{\pi}}{x^{n+1}}$$

وعليه يمكن الحصول على العلاقة ، وهي

$$y_n(x)=\frac{-(2n-1)!}{x^{n+1}} \tag{٥,١٣٦}$$

(٥,١٠) أمثلة وتطبيقات على دوال بسل

مثال(١)

باستخدام الدالة المولدة أثبت أن

$$J_n(x+y)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}J_r(x)J_{n-r}(y) \tag{٥,١٣٧}$$

الإثبات: حيث إن :

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(x+y)(t-\frac{1}{t})\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x+y)t^n$$

وعليه يكون $J_n(x+y)$ هو معامل t^n ولكن:

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(x+y)(t-\frac{1}{t})\right\}=\exp\left\{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})\right\}\cdot\exp\left\{\frac{y}{2}(t-\frac{1}{t})\right\}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}J_r(x)t^r\sum_{s=-\infty}^{\infty}J_s(y)t^s$$

$$=\sum_{r,\,s=-\infty}^{\infty}J_r(x)\,J_s(y)t^{r+s}$$

فإذا فرضنا أن $r+s=n$ فإننا نحصل على العلاقة المطلوبة.

مثال(٢)

أثبت أن :

$$\int_0^\infty \frac{J_n(x)}{x}\,dx = \frac{1}{n} \qquad (٥.١٣٨)$$

الإثبات: أثبتنا فيما سبق أن:

$$\int_0^\infty J_n(x)dx = 1, \qquad \forall n > 0$$

وباستخدام العلاقة التكرارية الآتية:

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$$

وبالتكامل نجد أن:

$$2n\int_0^\infty \frac{J_n(x)}{x}dx = \int_0^\infty J_{n-1}(x)dx + \int_0^\infty J_{n+1}(x)dx = 1+1=2$$

ومنها ينتج المطلوب.

مثال(٣)

إذا كانت λ_i هي جذر المعادلة $J_0(\lambda)=0$ أثبت أن:

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{J_0(\lambda_i)}{\{\lambda_i J_1(\lambda_i)\}^2} = -\frac{1}{2}\ln x \qquad (0<x<1) \qquad (٥.١٣٩)$$

الإثبات: للوصول إلى المطلوب نحاول تمثيل الدالة اللوغاريتمية على شكل متسلسلات بسل وذلك باستخدام نظرية التعامد ، حيث يمكن كتابة الآتي:

$$-\tfrac{1}{2}\ln x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_0(\lambda_i x),$$

$$c_i = \frac{2\int_0^1 x(-\tfrac{1}{2}\ln x) J_0(\lambda_i x)dx}{\{J_1(\lambda_i)\}^2} = \frac{-\int_0^1 x\ln x \cdot J_0(\lambda_i x)dx}{\{J_1(\lambda_i)\}^2}$$

ولحساب التكامل نستخدم العلاقة :

$$J_0(\lambda_i x) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{r!\Gamma(r+1)}\left(\frac{\lambda_i x}{2}\right)^{2r} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^{2r} x^{2r}$$

وحيث إن $J_0(\lambda_i) = 0$ فإنه عند وضع $x = 1$ نجد المتسلسلة التالية :

$$\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^{2r} = 0$$

وحيث إن :

$$\int_0^1 x^n \ln x dx = -\frac{1}{(1+n)^2}$$

إذاً لحساب التكامل نستخدم العلاقة السابقة ونتبع الآتي :

$$\int_0^1 x^n \ln x \cdot J_0(\lambda_i x)dx = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^{2r} \int_0^1 x^{2r+1}\ln x dx$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{1}{(r!)^2}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^{2r}\left\{\frac{-1}{(2r+2)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda_i^2}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{r+1}\frac{1}{\{(1+r)!\}^2}\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^{2r+2}$$

$$= \frac{1}{\lambda_i^2} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^{2r}$$

$$= \frac{1}{\lambda_i^2} \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^{2r} - 1 \right\}$$

وعليه نجد أن :

$$\int_0^1 x^n \ln x \cdot J_0(\lambda_i x) dx = -\frac{1}{\lambda_i^2}$$

ومنه نحصل على :

$$c_i = \frac{1}{\lambda_i^2 \{J_1(\lambda_i)\}^2}$$

وهو المطلوب.

مثال(٤)

أثبت أن :

$$J_n(x) Y_n'(x) - J_n'(x) Y_n(x) = \frac{A}{x}, \qquad (\text{ثابت } A) \quad (٥,١٤٠)$$

ثم ادرس (٥,١٤٠) عندما $x \to 0$.

الإثبات: حيث إن كلاً من $Y_n(x), J_n(x)$ تحقق معادلة بسل فإن :

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0, \qquad (١)$$

$$x^2 Y_n''(x) + x Y_n'(x) + (x^2 - n^2) Y_n(x) = 0 \qquad (٢)$$

بضرب المعادلة (١) في Y_n والمعادلة (٢) في J_n ثم الطرح نجد أن

$$x^2 (Y_n'' J_n - J_n'' Y_n) + x (Y_n' J_n - J_n' Y_n) = 0 \qquad (٣)$$

وحيث إن :

$$\frac{d}{dx}\{J_n Y_n' - J_n' Y_n\} = J_n Y_n'' - J_n'' Y_n$$

وعليه تصبح المعادلة (٣) على الصورة :

$$x\frac{d}{dx}\{J_n Y_n' - J_n' Y_n\} = -(Y_n' J_n - J_n' Y_n)$$

بفصل المتغيرات :

$$\frac{d\{Y_n' J_n - J_n' Y_n\}}{\{Y_n' J_n - J_n' Y_n\}} = -\frac{dx}{x}$$

ثم بالتكامل نجد أن : $\ln\{Y_n' J_n - J_n' Y_n\} + \ln x = \ln A$

وعليه تتحقق المعادلة (٥,١٤٠) ولدراسة سلوك (٥,١٤٠) عندما تكون x صغيرة نضع $n=0$ ومما سبق نجد أن :

$$J_0(x) \approx 1, \quad Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln x$$

وعليه نجد أن :

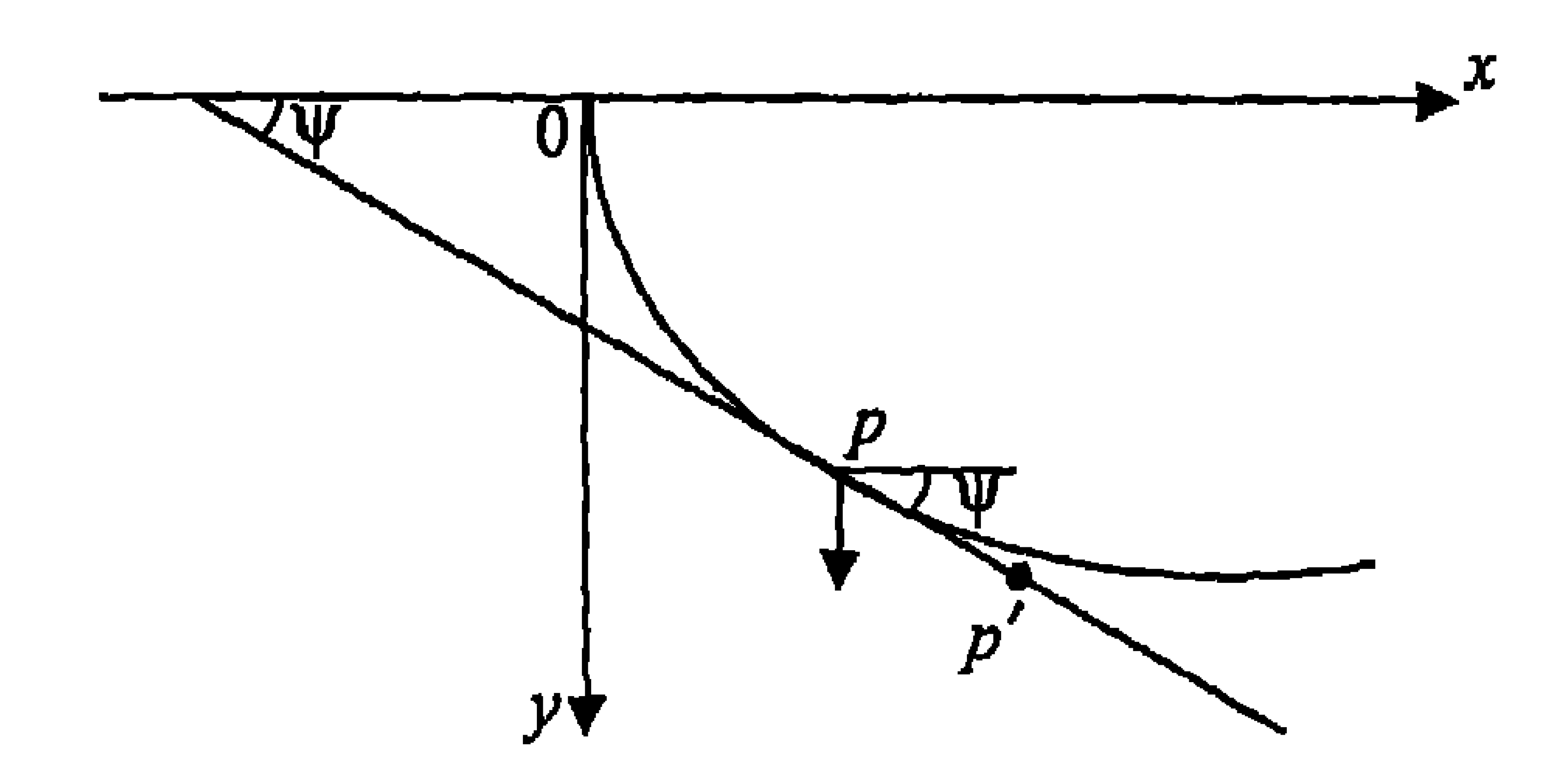
$$J_n Y_n' - J_n' Y_n \approx J_0 Y_0' - J_0' Y_0 = \frac{2}{\pi x}$$

وبالتالي فإن $A = \frac{2}{\pi}$.

وفي ما يلي بعض تطبيقات دوال بسل :

تطبيق(١). حساب الاهتزازات البسيطة لسلسلة (كثيفة) طولها l مثبتة عند أحد طرفيها تنزلق تحت تأثير وزنها إذا كانت وحدة الكثافة ρ.

نفرض أن القوس $s = op$ والمماس لقوى الشد يصنع زاوية ψ مع محور ox "انظر الشكل"



وعليه تكون مركبة الشد عند p بالنسبة للمحور oy هي $-T\sin\psi$ أما عند نقطة p' على السلسلة فإنها تعرف كالآتي : $p'(s+\delta s,\psi+\delta\psi)$ وتكون مجموع القوى الموازية لمحور oy هي (بعد تطبيق مبرهنة تيلور) عند p'

$$T\sin\psi+\frac{\partial}{\partial s}(T\sin\psi)\delta s+\cdots 0(\delta s)^2+\cdots$$

وعليه تكون محصلة مركبات القوى على pp' الموازية لمحور oy هي $\frac{\partial}{\partial s}(T\sin\psi)\delta s$

فإذا أخذنا مقطع صغير من السلسلة طوله δs وكثافته ρ فإن وزنه يكون $\rho\delta s$ ومعادلته حركته في اتجاه محور oy تأخذ الوضع :

$$\rho\delta s\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial}{\partial s}(T\sin\psi)\delta s \qquad (٥,١٤١)$$

فإذا فرضنا أن وزن السلسلة أسفل p يأخذ الوضع :

$$T=\rho g(l-s))$$ (طول السلسلة l

مع وضع $\sin\psi=\frac{\partial y}{\partial s}$ فإن معادلة حركة السلسلة تصبح كالآتي :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left\{g(l-s)\frac{\partial y}{\partial s}\right\} \qquad (٥,١٤٢)$$

ولحل المعادلة (٥,١٤٢) نفرض الآتي :

$$y=f(s)\sin(wt+\in) \qquad (٥,١٤٣)$$

باستخدام المعادلة (٥,١٤٣) في المعادلة (٥,١٤٢) نجد أن :

$$g(l-s)\frac{d^2 f}{ds^2} - g\frac{df}{ds} + w^2 f = 0$$

فإذا فرضنا أن $l-s=u$, $\frac{w^2}{g}=k^2$ فإن

$$u\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{df}{du} + k^2 f = 0 \qquad (٥,١٤٤)$$

والمعادلة (٥,١٤٤) يكون حلها الآتي :

$$f(u) = AJ_0(2k\sqrt{u}) + BY_0(2k\sqrt{u}) \qquad (٥,١٤٥)$$

وحيث إنه عند $x \to 0$ فإن $Y_0(x) \to \infty$ لذا نأخذ $B=0$ وتصبح المعادلة (٥,١٤٥) على الصورة :

$$f(u) = AJ_0(2k\sqrt{u}) \qquad (٥,١٤٦)$$

أما عندما $s=0$ فإن $f(s)=0$ وبمعنى آخر عندما $u=l$ نجد أن $f(u)=0$ وعليه نحصل على العلاقة :

$$J_0(2k\sqrt{l}) = 0$$

ويمكن من خلال حساب $J_0(0)$ ، فنجد أن أول تقريب لها هو :

$$p = 1.2024\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{أو} \quad 2k\sqrt{l} = 2.4048$$

تطبيق(٢). "معادلة التوصيل الحراري"

من معادلة الحرارة في الصورة الأسطوانية (r,θ,z)

(k ثابت)،

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (٥,١٤٧)$$

نحصل على العلاقة :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

فإذا كانت دالة الجهد لا تعتمد على طول الاسطوانة والزاوية فإن المعادلة (٥,١٤٧) تأخذ الوضع :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (٥,١٤٨)$$

والآن يكون الاتجاه هو حل المعادلة (٥,١٤٨) تحت الشروط الآتية :

$$u(a,t) = 0 \qquad u(r,0) = f(r) \qquad (٥,١٤٩)$$

فإذا فرضنا أن الحل على الصورة :

$$u(r,t) = R(r)T(t) \qquad (أ)$$

فبالتفاضل واستخدام هذه العلاقة في المعادلة (٥,١٤٨) نحصل على الآتي :

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \frac{1}{kT}\frac{dT}{dt} = -\lambda^2$$

والتي منها يمكن الوصول إلى المعادلات الآتية :

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = -\lambda^2 \qquad (ب)$$

$$\frac{1}{kT}\frac{dT}{dt} = -\lambda^2 \qquad (ج)$$

حيث λ ثابت اختياري، واختيرت الإشارة سالبة لضمان وجود حل عند $(t \to \infty)$.

المعادلة (ج) يمكن حلها للوصول إلى $T(t) = ce^{-k\lambda^2 t}$ ، بينما المعادلة (ب) تكتب على الشكل $r^2R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0$ ، وهذه المعادلة لها الحل :

$$R(t) = DJ_0(\lambda r) + EY_0(\lambda r)$$

وحيث إنه عندما $r=0$ نجد $Y_0 \to \infty$ وعليه نختار $E=0$ فنحصل على العلاقة $R(t)=DJ_0(\lambda r)$ ، وبذلك تكون دالة الجهد على الصورة :

$$u(r,t)=AJ_0(\lambda r)e^{-k\lambda^2 t} \qquad (٥,١٥٠)$$

باستخدام الشرط $u(a,t)=0$ نجد أن :

$$0=AJ_0(\lambda a)e^{-k\lambda^2 t} \qquad (٥,١٥١)$$

هذه المعادلة (٥,١٥١) تعين صراحة الجذور المميزة لقيم λ ، وعليه بكتابة $x=\lambda a$ يمكن على سبيل المثال:

الحصول على الأربعة جذور للدالة $J_0(x)$ الآتية:

$$x_1=2.405\ ,\ x_2=5.520\ ,\ x_3=8.654,\ \ x_4=11.79$$

وفي هذه الحالة تكون هناك دوال جهد مقابلة للجذور المميزة ، وعليه نحصل على:

$$u(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}A_sJ_0(\lambda_s r)e^{-\lambda_s^2 kt} \qquad (٥,١٥٢)$$

وعليه يمكن حساب العدد اللانهائي من الثوابت من الشرط الحدي الثاني وهو عندما $u(r,0)=f(r)$ نحصل على :

$$f(r)=\sum_{s=1}^{\infty}A_sJ_0(\lambda_s r)$$

وبتحقيق شرط التعامد بالنسبة لدالة بسل نجد أن :

$$\int_0^a rJ_0(\lambda_p r)f(r)dr=\int_0^a rJ_0(\lambda_p r)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}A_sJ_0(\lambda_s r)\right\}dr$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}A_s\int_0^a rJ_0(\lambda_p r)J_0(\lambda_s r)dr \qquad (٥,١٥٣)$$

وعليه باستخدام تكامل لوميل:

$$\int_0^a rJ_n(\lambda_\rho r)J_n(\lambda_s r)ds = 0 \qquad \rho \neq s,$$

$$\int_0^a rJ_n^2(\lambda_s r)dr = \frac{a^2}{2}\left\{[J_n'(\lambda_s a)]^2 + \left(1-\frac{n^2}{\lambda_s^2 a^2}\right)J_n^2(\lambda_s a)\right\}$$

وعليه تصبح المعادلة (٥,١٥٣) كالآتي:

$$\int_0^a rJ_0(\lambda_s r)f(r)dr = A_s\int_0^a rJ_0^2(\lambda_s r)dr \qquad (s=1,2,\cdots)$$

$$= \frac{a^2 A_s}{2}\left\{[J_0'(\lambda_s a)]^2 + J_0^2(\lambda_s a)\right\}$$

وبالتالي نحصل على قيم A_s ، مع ملاحظة أنه إذا كان $J_0(\lambda a)=0$ فإن $J_0(\lambda_s a)=0$ كالآتي:

$$A_s = \frac{2}{a^2[J_0'(\lambda_s a)]^2}\int_0^a rJ_0(\lambda_s r)f(r)dr$$

وحيث إن:

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

فإن:

$$A_s = \frac{2}{a^2 J_1^2(\lambda_s a)}\int_0^a rJ_0(\lambda_s r)f(r)dr$$

وتكون دالة الجهد كالآتي:

$$u(r,t) = \frac{2}{a^2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_s r)}{J_1^2(\lambda_s a)}e^{-\lambda_s^2 kt}\int_0^a r'J_0(\lambda_s r')f(r')dr' \qquad (٥,١٥٤)$$

تطبيق(٣). من التطبيقات الهامة هو تعيين كثافة التيار الساري خلال سلك دائري فإذا أخذنا اسطوانة ذات نصف قطر a ومحورها حول محور z وكانت الاسطوانة مصنوعة من مادة متجانسة لها معامل النفاذية μ والتوصيل σ. ففي هذه الحالة نجد أن متجه الكثافة للتيار I يكون في اتجاه محور x ويحقق المعادلة:

$$\nabla^2 I_z = \mu\sigma \frac{\partial I_z}{\partial t} \tag{٥,١٥٥}$$

وحيث إننا اعتبرنا حالة التيار المتردد فإن كثافة التيار تأخذ الوضع:

$$I_z = u(r)\cos wt = \operatorname{Re} u(r) e^{iwt} \tag{٥,١٥٦}$$

حيث u دالة في r فقط، w سعة التردد، $u(r)$ شدة الكثافة للتيار عند أي نقطة r. باستخدام المعادلة (٥,١٥٦) في المعادلة (٥,١٥٥) نجد أن $\nabla^2 u = iw\mu\sigma u$، وعليه تؤول المعادلة الأخيرة إلى الصورة:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - iw\mu\sigma u = 0$$

فإذا فرضنا أن $k^2 = -iw\mu\sigma$ فإن:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + k^2 u = 0$$

والمعادلة الأخيرة لها الحل العام:

$$u = AJ_0(kr) + BY_0(kr) \tag{٥,١٥٧}$$

ولكن عند $r = 0$ نجد أن $Y_0 \to \infty$ وعليه نأخذ $B = 0$ وتتحول المعادلة الأخيرة إلى

$u = AJ_0(kr) \quad , \; k = i^{\frac{3}{2}}\sqrt{w\mu\sigma}$ أو

$$u = AJ_0(i^{\frac{3}{2}} mr), \quad k = i^{\frac{3}{2}} m, \quad m = \sqrt{w\mu\sigma} \tag{٥,١٥٨}$$

المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة :

$$u = A[ber(mr) + i\,bei(mr)] \qquad (٥,١٥٩)$$

ولتعيين الثابت A عند $r = 0$ نفرض أن شدة الكثافة التيارية u_0 وعليه نجد أن :

$$u_0 = AJ_0(0) = A \qquad , J_0(0) = 1$$

فإن شدة الكثافة التيارية عند أي موضع r تكون :

$$u = u_0 J_0(i^{\frac{3}{2}} mr) \qquad (٥,١٦٠)$$

أو

$$u = u_0[ber(mr) + i\,bei(mr)] \qquad (٥,١٦١)$$

تمـــارين

١- أثبت أن :

(أ) $I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sinh x$ ،

(ب) $I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cosh x$

(ج) $\dfrac{d}{dx}\left[x^n I_n(x)\right] = x^n I_{n-1}(x)$ ،

(د) $\dfrac{d}{dx}\left[x^{-n} I_n(x)\right] = x^{-n} I_{n+1}(x)$

٢- أثبت أن :

(أ) $\dfrac{2n}{x} I_n(x) = I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x)$

(ب) $2I_7'(x) = I_6(x) + I_8(x)$

٣- باستخدام الدالة المولدة أثبت أن $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$

٤- أثبت أن :
$$\frac{d}{dx}\{xJ_n(x)J_{n+1}(x)\}=x\{J_n^2(x)-J_{n+1}^2(x)\}$$

٥- أثبت أن :

(أ) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(x\cos\theta)\cos\theta d\theta=\frac{\sin x}{x}$$

(ب) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(x\cos\theta)d\theta=\frac{1-\cos x}{x}$$

٦- أثبت أن :

A ثابت ، $$J_n'(x)J_{-n}(x)-J_n(x)J_{-n}'(x)=\frac{A}{x}$$

٧- أثبت أن :
$$\sum\frac{x^n}{n!}J_n(a)=J_0\left\{\sqrt{a^2-2ax}\right\}$$

٨- أثبت صحة العلاقات الآتية :

(أ) $$\int_0^{\infty}\frac{J_{n+1}(x)}{x}dx=\frac{1}{2^n\,\Gamma(n+1)}\ ,\quad n>-\frac{1}{2}$$

(ب) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(kx)t^n=\exp\{\frac{x}{2l}(k-\frac{1}{k})\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}k^n t^n J_n(x)$$

(ج) $$\exp\{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}I_n t^n$$

٩- عين قيمة التكاملات الآتية :

(أ) $m\neq n$ $\int_{-\infty}^{\infty} j_m(x)j_n(x)dx$ ، (ب) $\int_{-\infty}^{\infty}\{j_n(x)\}^2 dx$

١٠- أثبت أن:

(أ) $$ber_n x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{n+2k} \cos\{\frac{3}{4}(n+2k)\pi\}}{k!(n+k)!}$$

(ب) $$bei_n x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\frac{x}{2})^{n+2k} \frac{\sin\{\frac{3}{4}(n+2k)\pi\}}{k!(n+k)!}$$

١١- أثبت أن:

(أ) $\int_0^x t \, \text{ber} t \, dt = x bei' x$ ، (ب) $\int_0^x t \, \text{bei} t \, dt = -x ber' x$

١٢- أثبت أن:

(أ) $$bei\, x \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)$$

(ب) $$ber\, x \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)$$

الفصل السادس

معادلة وكثيرات حدود هرميت
Hermit Equation and Polynomials

يضم هذا الفصل ثلاثة بنود، اشتملت على كثيرات حدود هرميت والدالة المولدة لها وعلاقات التعامد والعلاقات التكرارية إضافة إلى بعض التطبيقات.

(٦,١) كثيرات حدود هرميت

تسمى المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2ny=0 \ , \ x\in \mathbb{R} \qquad (٦,١)$$

والتي قد تكتب بالشكل :

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}\ \frac{dy}{dx})+n\,e^{-x^2}\ y=0, \ \ x\in \mathbb{R}$$

معادلة هرميت نسبة إلى الفرنسي هرميت (١٨٢٢- ١٩٠١م).

لاحظ أن $e^{-x^2}\to 0$ عندما $x\to\infty$ ، ولإيجاد حل للمعادلة (٦,١) نستخدم طريقة فروبينس فنفرض أن : $z(x,s)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{s+r}$

إذاً

$$\frac{dz}{dx}=\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)a_r x^{s+r-1}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)(s+r-1)a_r x^{s+r-2}$$

وبالتعويض في المعادلة (٦،١) نجد أن :

$$\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)(s+r-1)a_r x^{s+r-2}-2\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)a_r x^{s+r}+2n\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{s+r}=0$$

بدراسة المعادلة الأساسية لقوى r نجد أن :

$$s(s-1)a_0=0 \tag{١}$$

وبمقارنة المعاملات نحصل على :

$$(s+1)sa_1=0 \tag{٢}$$

$$(s+r+2)(s+r+1)a_{r+2}+2\{n-s-r\}a_r=0 \tag{٣}$$

ومن (١) نجد أن $s=1, s=0$. ولكن عندما $s=1$ نجد أن المعادلة (٢) تعطي $a_1=0$ بينما عند $s=0$ تتحقق المعادلة (٢) لذلك يمكن القول إنه عند $s=0$ يكون للمعادلة التفاضلية (٦،١) حلان مستقلان ، ومن (٣) نجد أن :

$$a_{r+2}=\frac{2(r-n)}{(r+1)(r+2)}a_r \tag{٦،٢}$$

ولاستنتاج العلاقات التكرارية للمعادلة (٦،٢) نتبع الآتي :

(أ) عندما تكون r زوجية ، نجد أن :

$$r=0 \quad\Rightarrow\quad a_2=\frac{(-1)\cdot 2n}{2!}a_0$$

$$r=2 \quad\Rightarrow\quad a_4=\frac{-2\cdot(n-2)}{3\cdot 4}a_2=\frac{(-1)^2 2^2 n(n-2)}{4!}a_0$$

وهكذا وبوجه عام نحصل على العلاقة التكرارية :

$$a_{2r} = (-1)^r \frac{2^r n(n-2)\cdots(n-2r+2)}{(2r)!} a_0$$

ويكون الحل الأول لمعادلة هرميت التفاضلية هو :

$$y_1(x) = a_0 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2^r n(n-2)(n-4)\cdots(n-2r+2)}{(2r)!} x^{2r} \quad (٦,٣)$$

(ب) عندما تكون r فردية ، نجد أن :

$$r = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{(-1)\cdot 2(n-1)}{3!} a_1$$

$$r = 3 \Rightarrow a_5 = \frac{-2\cdot(n-3)}{4\cdot 5} a_3 = \frac{(-1)^2 2^2 (n-1)(n-3)}{5!} a_1$$

وبوجه عام نحصل على العلاقة التكرارية :

$$a_{2r+1} = (-1)^r \frac{2^r (n-1)(n-3)\cdots(n-2r+1)}{(2r+1)!} a_1$$

ويكون الحل الثاني على الصورة :

$$y_2(x) = a_1 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{2^r (n-1)(n-3)\cdots(n-2r+1)}{(2r+1)!} x^{2r+1} \quad (٦,٤)$$

ويكون الحل العام هو:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$= a_0 \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{2^r n(n-2)(n-4)\cdots(n-2r+2)}{(2r)!} x^{2r} \right\} +$$

$$+ a_1 \left\{ x + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{2^r (n-1)(n-3)\cdots(n-2r+1)}{(2r+1)!} x^{2r+1} \right\} \quad (٦,٥)$$

واضح من المعادلة (٦,٥) أنه لقيم x الصغيرة يكون الحل متقارب ، وأكثر من ذلك يكون الحلان (٦,٤) ، (٦,٣) مستقلين بحيث إن x محدودة.

ولكي نوجد كثيرات حدود هيرميت التي يرمز لها بالرمز $H_n(x)$ ونثبت أن :

$$H_n(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}$$

نكتب العلاقة (٦,٢) على الصورة :

$$a_r=-\frac{(r+1)(r+2)}{2(n-r)}a_{r+2} \qquad (٦,٦)$$

ثم نحسب $\cdots$ ، a_{n-2} ، a_{n-2} بدلالة a_n فنجد أن :

$$r=n-2 \quad\Rightarrow\qquad a_{n-2}=\frac{-n(n-1)}{2\cdot 2}a_n$$

$$r=n-4 \quad\Rightarrow\qquad a_{n-4}=\frac{-(n-2)(n-3)}{2\cdot 4}a_{n-2}$$

وبالتالي فإن :

$$a_{n-4}=\frac{(-1)^2n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2\cdot 4}a_n$$

و بوجه عام نحصل على العلاقة :

$$a_{n-2r}=\frac{(-1)^r n(n-1)(n-2)\cdots(n-2r+1)}{2^{2r}r!}a_n$$

بضرب بسط ومقام العلاقة الأخيرة في المقدار :

$$(n-2r)(n-2r-1)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

نحصل على الآتي :

$$a_{n-2r}=(-1)^r\frac{n!}{2^{2r}r!(n-2r)!}a_n$$

وعلى ذلك يكون الحل العام على الشكل التالي :

$$y=a_n\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n!}{2^{2r}r!(n-2r)!}x^{n-2r} \qquad (٦,٧)$$

حيث

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\frac{1}{2}n & \text{إذا كان n عدداً صحيحاً زوجياً}\\ \frac{1}{2}(n-1) & \text{إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً}\end{cases}$$

ولكي نحصل على $H_n(x)$ ، نجعل $a_n=2^n$ في (٦،٧) فنجد أن:

$$H_n(x)=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r} \qquad (٦،٨)$$

لاحظ أن:

$$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,\quad H_2(x)=4x^2-2$$
$$H_3(x)=8x^3-12x\ ,\quad H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$
$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$

(٦،٢) الدالة المولدة وتعبيرات أخرى لدالة هرميت

يضم هذا الجزء الدالة المولدة وبعض الحالات الخاصة لدالة هرميت.

مبرهنة(١)

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x) \qquad (٦،٩)$$

وتسمى الدالة e^{2tx-t^2} الدالة المولدة لكثيرات حدود هرميت.

البرهان

يتمثل الهدف في المبرهنة بإيجاد معامل t^n في الدالة الآسية e^{2tx-t^2} وعليه نتبع الآتي:

$$e^{2tx-t^2}=e^{2tx}\cdot e^{-t^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2tx)^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^s}{s!}=\sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(2x)^r}{r!s!}t^{r+2s}$$

ولأي قيمة ثابتة لـ s نفرض أن $n=r+2s$ أو $r=n-2s$ فنجد أن معامل t^n في الدالة الاسية هو المقدار :

$$\frac{(-1)^s(2x)^{n-2s}}{(n-2s)!s!}$$

لكن $n-2s=r\geq 0$. إذاً $s\leq\frac{n}{2}$

وعندما تكون n زوجية فإن $0\leq s\leq\frac{n}{2}$ وعندما n فردية فإن $0<s\leq\frac{n-1}{2}$ وعليه يكون :

$$(t^n \text{ معامل})=\sum_{s=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^s\frac{1}{(n-2s)!s!}(2x)^{n-2s}=\frac{1}{n!}H_n(x)$$

ومن ثم إثبات المبرهنة.

مبرهنة(٢): "صيغة رودريجس"

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \tag{٦,١٠}$$

البرهان

من مفكوك ماكلورين نلحظ أن :

$$F(t)=\left[1+\frac{t}{1!}F'(0)+\frac{t^2}{2!}F''(0)+\cdots+\frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0)+\cdots\right]$$

وعليه فإن :

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d^nF}{dt^n}\right)_{t=0}\frac{t^n}{n!} \tag{٦,١١}$$

وحيث إن :

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$$

إذاً بالتفاضل بالنسبة إلى t عدد n من المرات ثم حساب قيمة التفاضلات عند $t=0$ نجد أن :

$$(\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2tx-t^2})_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{H_n(x)}{n!} \frac{d}{dt^n} t^n)_{t=0}$$

ومن ثم نحصل على الآتي :

$$H_n(x) = (\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{2tx-t^2})_{t=0} = (\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{x^2-(x-t)^2})_{t=0} = e^{x^2} (\frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2})_{t=0} \quad (١)$$

باستخدام قاعدة التفاضل

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x-t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x-t)$$

مع تكرار التفاضلات n من المرات نجد أن :

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(x-t) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x-t)$$

وعليه تتحول العلاقة (١) إلى الصورة :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(x-t)^2})_{t=0}$$

$$= (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

مبرهنة(٣)

$$H_n(x) = 2^n \left\{ \exp(-\tfrac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2}) \right\} x^2 \quad (٦,١٢)$$

البرهان

لاحظ أن :

$$\exp(\frac{d}{dx}) = e^{\frac{d}{dx}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\frac{d}{dx})^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m}$$

كما أن :
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{2tx}=te^{2tx}$$

وعليه فإن :
$$(\frac{1}{2}\frac{d}{dx})^{n}e^{2tx}=t^{n}e^{2tx}$$

وبالتالي فإن :

$$\exp(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2})\exp(2tx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2})^{n}e^{2tx}$$

$$\exp(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2})\exp(2tx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{1}{2}\frac{d}{dx})^{2n}e^{2tx}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\cdot e^{2tx}=e^{-t^2}\cdot e^{2tx}$$

وعليه نحصل على :

$$\exp(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2})\exp(2tx)=e^{-t^2+2tx}$$

وبإيجاد مفكوك الطرفين في قوى t نجد أن :

$$\exp(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

وعليه يكون معامل t^n للطرفين هو:

$$\left\{\exp(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2})\right\}\frac{2^n x^n}{n!}=\frac{H_n(x)}{n!}$$

ومنها ينتج المطلوب إثباته.

ملحوظة: يمكن إثبات العلاقات الآتية

$$H_0(x)=1\,,\quad H_1(x)=2x\,,\quad H_2(x)=4x^2-2$$
$$H_3(x)=8x^3-12x\,,\quad H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$

بطريقة أخرى باستخدام الدالة المولدة، حيث إن :

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x) \quad (\diamond)$$

ولإيجاد مفكوك مكلورين للطرف الأيسر

$$e^{2tx-t^2}=1+(2tx-t^2)+\frac{(2tx-t^2)^2}{2!}+\frac{(2tx-t^2)^3}{3!}++\frac{(2tx-t^2)^4}{4!}+\cdots$$

$$=1+(2x)t+(2x^2-1)t^2+\frac{1}{3}(4x^3-6x)t^3+\frac{1}{3!}(4x^4-12x^2+3)t^4+\cdots$$

ومقارنة قوى t في طرفي العلاقة ($\diamond$) . وبصورة خاصة يمكن أن نثبت ما يلي.

مبرهنة(٤)

$$H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\ ,\quad H_{2n+1}(0)=0 \qquad (٦,١٣)$$

البرهان

باستخدام العلاقة :

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}H_m(x)$$

ووضع $x=0$ نجد أن :

$$e^{-t^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}H_m(0)$$

بحساب مفكوك الطرف الأيمن نجد أن

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^{2m}}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}H_m(0)$$

بمساواة معاملات قوى t^n في الطرفين نلحظ أنه عندما تكون m فردية نجد أن $H_m(0)=0$ وعليه فإن $H_{2n+1}(0)=0$ أما إذا كان n عدداً زوجياً فإن :

$$(-1)^n\frac{1}{n!}=H_{2n}\frac{1}{(2n)!}$$

وعليه فإن :

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

(٦,٣) علاقة التعامد والعلاقات التكرارية

مبرهنة(٥)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n \sqrt{\pi} \cdot n! \delta_{nm} \qquad (٦,١٤)$$

البرهان

بما أن :

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} , \qquad e^{-s^2+2sx} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x) \frac{s^m}{m!}$$

إذاً

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$

يمثل معامل $\frac{t^n s^m}{n!m!}$ في التكامل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx} dx$$

ولكن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-t^2+2tx} e^{-s^2+2sx} dx = e^{-(t^2+s^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2tx+2sx} dx$$

$$= e^{-(t^2+s^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\{x-(s+t)\}^2 + (s+t)^2\right] dx$$

$$= e^{2st} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\{x-(s+t)\}^2\right] dx$$

وبالتعويض عن $u = x-(s+t)$ نجد أن :

$$e^{2st}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\{s-(s+t)\}^2\right]dx = e^{2st}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\,du$$

وحيث إن :

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi},\ e^{2st}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n s^n t^n}{n!}$$

وعليه نجد أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-t^2+2tx}e^{-s^2+2sx}\,dx=\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n s^n t^n}{n!} \qquad (٦,١٥)$$

العلاقة (٦,١٥) توضح لنا أنه إذا كان $n \neq m$ فإن معامل $\frac{s^m t^n}{n!m!}$ يساوي صفرا بينما إذا كان $n = m$ فإن المعامل يصبح $\sqrt{\pi}\,2^n\, n!$. إذاً

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \sqrt{\pi}\,2^n\,n! & n=m\end{cases}$$

برهان آخر: لتكن $u_n = e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$. إذاً

$$u_n''+(2n+1-x^2)u_n=0\ ,\quad u_m''+(2m+1-x^2)u_m=0$$

وعليه فإن :

$$u_n''u_m-u_nu_m''+2(n-m)u_mu_n=0$$

والتي تكتب على الشكل :

$$\frac{d}{dx}(u_n'u_m-u_m'u_n)+2(n-m)u_mu_n=0$$

وحيث إن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}(u_n'u_m-u_m'u_n)=0$$

إذاً

$$(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} u_m\, u_n\, dx = 0$$

فإذا كان $n \neq m$ ، فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_m\, u_n\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = 0$$

أما إذا كان $n = m$ فمن مبرهنة(٢)

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx}(-e^{-x^2})$$

وعليه فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) \frac{d^n}{dx} e^{-x^2}\, dx$$

وبالتكامل بالتجزيء وفرض $u = H_n(x)$ ، $v = \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

نجد أن : $v = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}$ ، $uv = 0$ ،

وعليه فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} H'_n(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\, dx$$

$$= (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} e^{-x^2}\, dx$$

$$= \cdots = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x)\, e^{-x^2}\, dx$$

لكن الحد الذي يحوي أعلى قوة لـ x في $H_n(x)$ يساوي $2^n x^n$. إذاً $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$ ، وعليه فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\,dx=(2^n n!)2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=(2^n n!)2(\frac{\sqrt{\pi}}{2})=2^n n!\sqrt{\pi}$$

مبرهنة(٦)

(أ) $H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)\ ,\ \ n\geq 1;\quad H_0'(x)=0$

(ب) $H_{n+1}(x)=2nH_n(x)-2nH_{n-1}(x)\ ;\ \ H_1(x)=2xH_0(x)$

البرهان

(أ) بما أن:

$$e^{-t^2+2tx}=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (❖)$$

إذاً بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x)\frac{t^n}{n!}=2te^{-t^2+2tx}=2t\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

وعليه نحصل على العلاقة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x)\frac{t^n}{n!}=2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

بمقارنة قوى t^n للطرفين نجد أن :

$$H_0'(x)=0$$

$$\frac{H_n'(x)}{n!}=\frac{2H_{n-1}(x)}{(n-1)!},\quad \forall n>0$$

ومنها نجد أن $H'_n(x)=2nH_{n-1}(x)$.

(ب) بتفاضل طرفي المعادلة (❖) بالنسبة إلى t نجد أن:

$$(2x-2t)e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt^{n-1}}{n!}H_n(x)$$

والتي قد تكتب على الشكل :

$$2(x-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n H_n(x)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}H_n(x)$$

ومنها نجد أن :

$$2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n H_n(x)}{n!}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}H_n(x)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}H_n(x)}{(n-1)!}$$

وبمطابقة معاملات t^0 في الطرفين في العلاقة السابقة نجد أن :

$$2xH_0(x)=H_1(x)$$

وبمطابقة معاملات t^n نجد أن :

$$2x\frac{H_n(x)}{n!}-2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}=\frac{H_{n+1}(x)}{n!}$$

ومنها نجد أن :

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$$

(٦,٤) " دالة ويبر – هرميت Weber – Hermite function "

لدارسة دالة ويبر – هرميت ، لاحظ أن المعادلة التفاضلية الآتية : .

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\lambda-x^2)y=0 \qquad (٦,١٦)$$

تتحول إلى معادلة هرميت باستخدام التعويض $y=ze^{-x^2/2}$ ، وعليه فإن :

$$\frac{dy}{dx}=-xze^{-x^2/2}+e^{-x^2/2}\frac{dz}{dx} \qquad (٦,١٧)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-ze^{-x^2/2}-2e^{-x^2/2}x\frac{dz}{dx}+x^2ze^{-x^2/2}+e^{-x^2/2}\frac{d^2z}{dx^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (٦،١٦) والقسمة على $e^{-x^2/2}$ نحصل على :

$$-z-2x\frac{dz}{dx}+x^2z+\frac{d^2z}{dx^2}+(\lambda-x^2)z=0$$

والتي يمكن أن تكتب على الشكل الآتي :

$$\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+(\lambda-1)z=0$$

والمعادلة الأخيرة تمثل معادلة هرميت عندما $n=\frac{1}{2}(\lambda-1)$ ويكون حلها على الصورة :

$$\psi_n(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}H_n(x) \qquad (٦،١٨)$$

وتسمى العلاقة (٦،١٨) دالة ويبر- هرميت من الدرجة n والتي تحقق علاقات تكرارية نوردها في المبرهنة الآتية.

مبرهنة(٧)

(أ) $$\psi_{n+1}(x)=2x\psi_n(x)-2n\psi_{n-1}(x), \qquad n\geq 1$$

(ب) $$\psi'_n(x)=2n\psi_{n-1}(x)-x\psi_n(x)$$

(ج) $$\psi'_n(x)=x\psi_n(x)-x\psi_{n+1}(x)$$

(د) $$\psi'_n(x)=n\psi_{n-1}(x)-\frac{x}{2}\psi_{n+1}(x)$$

البرهان

(أ) لاحظ أن :

$$2x\psi_n(x)-2n\psi_{n-1}(x)=2xe^{\frac{-x^2}{2}}H_n(x)-2ne^{\frac{-x^2}{2}}H_{n-1}(x)$$

$$=e^{\frac{-x^2}{2}}\left[2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)\right]$$

$$=e^{\frac{-x^2}{2}}H_{n+1}(x)=\psi_{n+1}(x)$$

(ب) لاحظ أن:

$$\psi_n'(x)=\frac{d}{dx}e^{\frac{-x^2}{2}}H_n(x)=e^{\frac{-x^2}{2}}H_n'(x)-xe^{\frac{-x^2}{2}}H_n(x)$$

$$=e^{\frac{-x^2}{2}}\left[H_n'(x)-xH_n(x)\right]$$

$$=e^{\frac{-x^2}{2}}\left[2nH_{n-1}(x)-xH_n(x)\right]$$

$$=2n\psi_{n-1}(x)-x\psi_n(x)$$

ومن العلاقتين (أ) ، (ب) نجد أن:

$$\psi_n'(x)=2x\psi_n(x)-\psi_{n+1}(x)-x\psi_n(x)=x\psi_n(x)-\psi_{n+1}(x)$$

(د) اجمع العلاقتين (ب) و (ج) تحصل على المطلوب.

• أما علاقة التعامد لدالة ويبر- هارمايت فتوضحها المبرهنة الآتية.

مبرهنة(٨)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\psi_n(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^2}{2}}\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}H_m(x)H_n(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi} & m=n\end{cases} \qquad (٦,١٩)$$

البرهان

بما أن:

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0 \qquad (٦,٢٠)$$

إذاً ضع $H_n(x)=\mu z$ ، ثم افرض أن $\mu=e^{-\frac{1}{2}\int -2x dx}=e^{\frac{1}{2}x^2}$ تجد أن $H_n(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}z$ وبالتفاضل ينتج أن:

$$H_n'(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}z+e^{\frac{x^2}{2}}\frac{dz}{dx}$$

$$H_n''(x)=2xe^{\frac{x^2}{2}}\frac{dz}{dx}+e^{\frac{x^2}{2}}z+x^2e^{\frac{x^2}{2}}z+e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^2z}{dx^2}$$

بالتعويض في المعادلة (٦،٢٠) والقسمة على $e^{\frac{x^2}{2}}$ نجد أن:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+(2n+1-x^2)z=0 \qquad (٦،٢١)$$

وعليه نجد أن الدالة $z=e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$ تحقق المعادلة (٦،٢١) ومن ثم إذا كان $n\neq m$ فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}H_m(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx=0$$

أما إذا كان $m=n$ ، فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_n^2(x)dx=\sqrt{\pi}\cdot 2^n n!$$

- **من أهمية علاقة التعامد أنه يمكن تمثيل دالة ما بدلالة متسلسلة هرميت كالآتي:**

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nH_n(x) \qquad (٦،٢٢)$$

من قاعدة التعامد نجد أن :

$$A_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}f(x)H_n(x)dx \qquad (٦،٢٣)$$

(٦,٥) "أمثلة عامة وتطبيقات"

مثال(١) احسب :

$$\int_{0}^{\infty}xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx \qquad (٦،٢٤)$$

الحل

باستخدام العلاقة :

$$xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x) \qquad (\ast)$$

نجد أن :

$$I = \int_0^\infty xe^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \left\{nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x)\right\}H_m(x)dx$$

بتطبيق شرط التعامد نحصل على :

$$I = n2^{n-1}\sqrt{\pi}(n-1)!\delta_{n-1,m} + \frac{1}{2}2^{n+1}\sqrt{\pi}(n+1)!\delta_{n+1,m}$$

ومنها نجد أن :

$$I = \sqrt{\pi}2^{n-1}n!\left[\delta_{n-1,m} + 2(n-1)\delta_{n+1,m}\right] \qquad (٦,٢٥)$$

مثال(٢) احسب

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx \qquad (٦,٢٦)$$

الحل أيضاً بتطبيق العلاقة ($\ast$) في مثال (١) نجد أن :

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \left\{nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x)\right\}\left\{mH_{m-1}(x) + \frac{1}{2}H_{m+1}(x)\right\}dx$$

$$= [nm\int_0^\infty e^{-x^2} H_{n-1}(x)H_{m+1}(x) + \frac{n}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} H_{n-1}(x)H_{m+1}(x) +$$

$$\left.\frac{m}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} H_{n+1}(x)H_{m-1}(x) + \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-x^2} H_{n+1}(x)H_{m+1}(x)\right]dx$$

بتطبيق شرط التعامد نحصل على :

$$I=\left[nm\sqrt{\pi}2^n n!\delta_{n+1,m-1}+\frac{n}{2}\sqrt{\pi}2^n n!\delta_{n-1,m+1}\right.$$
$$\left.+\frac{m}{2}\sqrt{\pi}2^n n!\delta_{n+1,m-1}+\frac{1}{4}\sqrt{\pi}2^n n!\delta_{n+1,m+1}\right]$$
$$=2^n\sqrt{\pi}\cdot n!\left[nm\delta_{n+1,m-1}+\frac{n}{2}\delta_{n-1,m+1}+\frac{m}{2}\delta_{n+1,m-1}+\frac{1}{4}\delta_{n+1,m+1}\right] \quad (٦،٢٧)$$

مثال(٣) أثبت أن :

$$\frac{d^m}{dx^m}\{H_n(x)\}=\frac{2^m n!}{(n-m)!}H_{n-m}(x),\ n>m \quad (٦،٢٨)$$

الإثبات: من تعريف دالة هرميت نجد أن معامل $\frac{t^n}{n!}$ يظهر في المقدار e^{2tx-x^2} وعليه فإن تفاضل $\frac{d^m}{dx^m}H_n(x)$ يمثل معامل $\frac{t^n}{n!}$ للمقدار $\frac{d}{dx}(e^{2tx-x^2})$ حيث $n>m$، وبالتالي فإن :

$$\frac{d^m}{dx^m}e^{2tx-x^2}=(2t)^m\exp(2tx-t^2)=2^m t^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$$
$$\frac{d^m}{dx^m}e^{2tx-x^2}=2^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}H_n(x)\,t^{n+m}$$

وعليه يكون معامل t^n للمشتقة هو: $\frac{2^m H_{n-m}(x)}{(n-m)!}$ ، ويصبح معامل $\frac{t^n}{n!}$ هو $\frac{2^m n! H_{n-m}(x)}{(n-m)!}$ وهو المطلوب.

مثال(٤): أثبت أن :

$$P_n(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot n!}\int_0^{\infty}t^n e^{-t^2}H_n(xt)dt \quad (٦،٢٩)$$

حيث $p_n(x)$ كثيرة حدود لجندر

الإثبات: من العلاقة (٦,٨) نجد أن:

$$H_n(x)=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r}$$

بوضع xt بدلاً من x نجد أن:

$$H_n(tx)=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-2r)!}(2xt)^{n-2r}$$

وعليه فإن:

$$I=\int_0^\infty t^n e^{-t^2}H_n(xt)\,dt=\int_0^\infty t^n e^{-t^2}\sum_{r=0}^{[n]}(-1)^r\frac{n!}{r!(n-2r)!}2^{n-2r}x^{n-2r}t^{n-2r}\,dt$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{n!\cdot 2^{n-2r}}{r!(n-2r)!}\cdot x^{n-2r}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n-2r}\,dt$$

من تعريف دالة جاما:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt=2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2n-1}du$$

نجد أن:

$$\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2(n-r+\frac{1}{2})-1}dt=\frac{1}{2}\Gamma(n-r+\frac{1}{2})$$

وعليه فإن:

$$I=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{2r!(n-2r)!}2^{n-2r}x^{n-2r}\Gamma(n-r+\frac{1}{2})$$

لكن $\Gamma(l+\frac{1}{2})=\frac{(2l)!}{2^{2l}l!}\sqrt{\pi}$. إذاً

$$I=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\frac{n!}{2r!(n-2r)!}2^{n-2r}x^{n-2r}\left(\frac{\sqrt{\pi}(2n-2r)!}{2^{2n-2r}(n-r)!}\right)$$

بالاختصار وضرب الطرفين في المقدار $\frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot n!}$ نجد أن :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}\cdot n!}I=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-2r)!(n-r)!}x^{n-2r}=p_n(x)$$

مثال(٥) أثبت أن :

$$e^{-x^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos 2xt\,dt \qquad (٦،٣٠)$$

ومن ثم استنتج أن:

$$(1)\ \ H_{2n}(x)=\frac{(-1)^n 2^{2n+1}e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n}\cos 2xt\cdot dt \quad (٦،٣١)$$

$$(2)\ \ H_{2n+1}(x)=\frac{(-1)^n 2^{2n+2}e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n+1}\sin 2xt\cdot dt \quad (٦،٣٢)$$

الإثبات باستخدام مفكوك ماكلورين، نجد أن :

$$\cos 2xt=1-\frac{(2xt)^2}{2!}+\frac{(2xt)^4}{4!}-\cdots=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(2xt)^{2n}}{(2n)!}$$

وبناء على ذلك يكون الطرف الأيمن في العلاقة (٦،٣٠) كالآتي :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos 2xt\cdot dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{(2xt)^{2n}}{(2n)!}dt$$

$$=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n}}{\sqrt{\pi}(2n)!}\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n}dt$$

باستخدام تعريف دالة جاما $\Gamma(m)=2\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2m-1}du$ ، نحصل على :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}\cos 2xt\,dt=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n}}{\sqrt{\pi}(2n)!}\Gamma(n+\tfrac{1}{2})$$

وباستخدام العلاقة $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$ ، نجد أن الطرف الأيمن في العلاقة (٦،٣٠)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{\sqrt{\pi}(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}=\sum(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}=e^{-x^2}$$

وعليه تكون العلاقة (٦،٣٠) قد أثبتت.

لإثبات العلاقة (٦،٣١) نفاضل العلاقة (٦،٣٠) $2n$ من المرات بالنسبة إلى x فنحصل على الآتي:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}e^{-x^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}(-1)^n 2^{2n}t^{2n}\cos(2xt)dt$$

$$=\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2n}\cos(2xt)dt$$

ولكن من صيغة رودريجس $H_{2n}(x)=e^{x^2}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}e^{-x^2}$ ، نحصل على العلاقة:

$$H_{2n}(x)=\frac{(-1)^n 2^{2n+1}e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2n}\cos(2xt)dt$$

بالمثل للحصول على العلاقة (٦،٣٢) نفاضل العلاقة (٦،٣٠) $(2n+1)$ من المرات بالنسبة إلى x فنحصل على:

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}e^{-x^2}=\frac{-2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}(-1)^n 2^{2n+1}t^{2n+1}\cos(2xt)dt$$

$$=\frac{(-1)^n 2^{2n+2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^{2n+1}\sin(2xt)dt$$

ولكن من صيغة رودريجس $H_{2n+1}(x)=e^{-x^2}\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}e^{-x^2}$ ، يمكن الحصول على العلاقة المطلوبة.

مثال(٦) باستخدام دالة ويبر- هرميت احسب الآتي:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\psi'_n(x)\,dx \qquad (٦,٣٣)$$

الحل باستخدام (مبرهنة٧- د)

$$\psi'_n(x)=n\psi_n(x)-\frac{1}{2}\psi_{n+1}(x)$$

نجد أن:

$$I=n\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\psi_{n-1}(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\psi_{n+1}(x)\,dx$$

باستخدام علاقة التعامد لدالة ويبر- هرميت نلحظ الآتي:

$$I=n2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}=2^{n-1}n!\sqrt{\pi}, \qquad m=n-1$$

$$I=-\frac{1}{2}2^{n+1}(n+1)!\sqrt{\pi}=-2^{n}(n+1)!\sqrt{\pi}, \qquad m=n+1$$

وعليه نحصل على الآتي:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\psi'_n(x)\,dx=\begin{cases}\sqrt{\pi}2^{n-1}n! & m=n-1\\ -\sqrt{\pi}2^{n}(n-1)! & m=n+1\\ 0 & m\neq n-1,\ m\neq n+1\end{cases}$$

مثال(٧) "الحركة التوافقية البسيطة في ميكانيكا الكم"

في ميكانيكا الكم، نجد أن معادلة شرودنجر (١٨٨٥- ١٩٦١) بالنسبة إلى الحركة التوافقية الخطية أو البسيطة هي:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-\frac{1}{2}kx^2)\psi=0 \qquad (٦,٣٤)$$

حيث E الطاقة الكلية، h ثابت بلانك، $\psi(x)$ دالة شرودنجر الموجية أو الدالة الذاتية (Eigen Function). وإذا كان $k=4\pi^2 m\nu^2$، تصبح المعادلة (٦,٣٤) كالآتي:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-2\pi^2 m\nu^2 x^2)\psi=0 \qquad (٦,٣٥)$$

ويجب أن يحقق الحل $\psi(x)$ الشرطين:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \psi(x)\to 0 \quad \text{،} \quad |x|\to\infty \ \text{عندما} \\ (2) & \int_{-\infty}^{\infty}|\psi^2|\,dx=1\end{array}\right\} \qquad (٦,٣٦)$$

والآن إذا فرضنا أن $u=2\pi\sqrt{\frac{\nu m}{h}}\,x$ تتحول المعادلة (٦,٣٥) إلى الآتي:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(\frac{2E}{h\nu}-u^2\right)\psi=0 \qquad (٦,٣٧)$$

وتصبح الشروط في (٦,٣٦) كالآتي:

$$\left.\begin{array}{l}\psi(u)\to 0 \quad \text{،} \quad |u|\to\infty \ \text{عندما} \\ \int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\,du=2\pi\sqrt{\frac{\nu m}{h}}\end{array}\right\} \qquad (٦,٣٨)$$

وباستخدام التعويض $\psi=ye^{\frac{-u^2}{2}}$ والفرض $\frac{2E}{h\nu}=2n+1$ تتحول المعادلة (٦,٣٧) إلى معادلة هرميت الآتية:

$$y''-2u\,y'+2ny=0 \qquad (٦,٣٩)$$

وبالتالي فإن حل المعادلة (٦,٣٧) هو

$$\psi=c\,e^{\frac{-u^2}{2}}H_n(u) \qquad (٦,٤٠)$$

حيث c ثابت، وبتطبيق الشرط الثاني في (٦,٣٨) نجد أن $c=\left(\frac{4\pi m\nu}{2^{2n}(n!)^2 h}\right)^{\frac{1}{4}}$ ،

وتكون الدالة الذاتية المصاحبة للقيمة الذاتية $E=h\nu(n+\frac{1}{2})$ هي:

$$\psi = \left(\frac{4\pi m v}{2^{2n}(n!)^2 h}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-u^2}{2}} H_n(u) \qquad (٦,٤١)$$

تمـــارين

١- عبر عن الدوال الآتية $1, x, x^2$ بدلالة دالة هرميت.

٢- أثبت صحة العلاقة : $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} \{H_n(x)\}^2 dx = \sqrt{\pi}\cdot 2^n n!(n+\frac{1}{2})$

٣- إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من الرتبة m تحت الشرط $m < n$ فأثبت أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x) dx = 0$$

٤- أثبت أن : $e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt\,dt$

وبتفاضل هذه العلاقة $2n$ من المرات أثبت أن :

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt\,dt$$

ومن ثم أوجد $H_{2n+1}(x)$

٥- أثبت أن

(أ) $\int_{-\infty}^{\infty} \{H_n(x)\}^2 e^{-2x^2} dx = 2^{n-\frac{1}{2}}\Gamma(n+\frac{1}{2})$

(ب) $\frac{1}{2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{H_n(x)\}^2 e^{-x^2}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx$

٦- أثبت أن :

(أ) $2n\psi_{n-1}(x) = x\psi_n(x) + \psi_n'(x)$

(ب) $2x\psi_n(x) - 2n\psi_{n-1}(x) = \psi_{n+1}(x)$

(ج) $\psi'_n(x) = x\psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)$

٧- احسب التكاملات الآتية :

(أ) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx$ ، (ب) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi'_n(x)dx$

الفصل السابع

كثيرات حدود لاجير
Laguerre Polynomials

(٧,١) معادلة وكثيرات حدود لاجير

تعرف معادلة لاجير بالصورة التالية :

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+ny=0, \quad 0\le x<\infty \qquad (٧,١)$$

وسُميت بهذا الاسم نسبة إلى الفرنسي أدموند لاجير (١٨٣٤- ١٨٨٦)، ولهذه المعادلة ولكثيرات حدود لاجير تطبيقات مهمة في ميكانيكا الكم، كما يمكن كتابة معادلة لاجير بالشكل الآتي :

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right)+ne^{-x}y=0, \quad 0\le x<\infty$$

ولحل المعادلة (٧,١) بطريقة فروبينيس، نفرض أن الحل هو :

$$z(x,s)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{s+r}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x مرتين نحصل على :

$$\frac{dz}{dx}=\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)a_r x^{s+r-1}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)(s+r-1)a_r x^{s+r-2} \qquad (٧,٢)$$

وبالتعويض في المعادلة (٧,١) نحصل على :

$$\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)(s+r-1)a_r x^{s+r-1}+\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)a_r x^{s+r-1}$$
$$-\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)a_r x^{s+r}+n\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{s+r}=0$$

والتي تكتب بعد القسمة على x^s والاختصار على الشكل :

$$\sum_{r=0}^{\infty}(s+r)^2 a_r x^{r-1}+\sum_{r=0}^{\infty}(n-s-r)a_r x^{r}=0 \qquad (٧,٣)$$

وبمطابقة معاملات قوى x في طرفي العلاقة (٧,٣) نحصل على المعادلة الأساسية $s^2=0$ ، وعليه فإن $s=0$ جذر مكرر. وكذلك

$$a_{r+1}=\frac{(s+r-n)}{(s+r+1)^2}a_r \qquad (٧,٤)$$

وعليه للمعادلة (٧,١) حلان مستقلان ، هما :

$$z(x,0) \quad , \quad \left[\frac{\partial z}{\partial s}\right]_{s=0} \qquad (٧,٥)$$

ولإيجاد إحداهما نضع $s=0$ في العلاقة التكرارية فنحصل على (٧,٤) :

$$a_{r+1}=\frac{(r-n)}{(r+1)^2}a_r=-\frac{(n-r)}{(r+1)^2}a_r$$

فإذا كان $a_n=0$ ، فإن $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0$

وعليه يمكن استنتاج الحل كالآتي :

$$y = z(x,0) = a_0\left\{1-\frac{n}{1^2}x+\frac{n(n-1)}{(2!)^2}x^2+\cdots+(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r!)^2}x^r+\cdots\right\}$$

أو

$$y = a_0\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{(r!)^2}x^r$$

$$= a_0\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!(r!)^2}x^r \qquad (٧,٦)$$

وإذا كان $a_0 = 1$ يسمى الحل (٧,٦) كثيرة حدود لاجير والتي يرمز لها بالرمز $L_n(x)$. إذاً

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(n-r)!(r!)^2}x^r \qquad (٧,٧)$$

والآن إلى الآتي :

مبرهنة(١) "الدالة المولدة " على الصورة

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n \qquad (٧,٨)$$

البرهان حيث إن

$$\frac{1}{1-t}\exp\{-xt/(1-t)\} = \frac{1}{1-t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(-\frac{xt}{1-t}\right)^r = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{x^r t^r}{(1-t)^{r+1}}$$

لكن

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = 1+(r+1)t+\frac{(r+1)(r+2)}{2!}t^2+\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}t^3+\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r+k)!}{k!r!}t^k\,,\quad |t|<1$$

وعليه نحصل على الآتي :

$$\frac{1}{1-t}\exp\{-xt/(1-t)\} = \sum_{r,k=0}^{\infty}(-1)^r \frac{(r+k)!}{(r!)^2 k!}x^r t^{r+k} \qquad (٧,٩)$$

لأي قيمة ثابتة لـ r يمكن الحصول على معامل t^n بوضع $r+k=n$ وعليه يكون معامل t^n في مفكوك المعادلة (٧,٨) كالآتي :

$$(-1)^r \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r$$

ومن ذلك يمكن الحصول على العلاقة :

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r \cdot$$

وفي ما يلي شكل آخر لكثيرات حدود لاجير ومبرهنة أخرى :

مبرهنة(٢)

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \qquad (٧,١٠)$$

البرهان

باستخدام مبرهنة ليبنز في التفاضل ، نجد أن :

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!r!}\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}u \cdot (\frac{d^r v}{dx^r})$$

وبالتالي لدينا :

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!r!}(\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}x^n)(\frac{d^r}{dx^r}e^{-x})$$

ولكن

$$\frac{d^k}{dx^k}x^m = m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!}x^{m-k}$$

وعليه نحصل على الآتي :

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\frac{n!}{r!}x^r(-1)^r e^{-x}$$

$$= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!\cdot x^r}{(r!)^2(n-r)!} = L_n(x)$$

مما سبق من تعريف دالة لاجير يمكن استنتاج القيم الآتية :

$$L_0(x)=1,\quad L_1(x)=1-x,\qquad L_2(x)=\frac{1}{2!}(x^2-4x+2)$$

$$L_3(x)=\frac{1}{3!}(-x^3+9x^2-18x+6),\ L_4(x)=\frac{1}{4!}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)$$

وبالتالي يمكن إثبات ما يلي :

مبرهنة(٣)

(أ) $L_n(0)=1$ ، (ب) $L'_n(0)=-n$

البرهان

بما أن :

$$\frac{1}{1-t}\exp\{-xt/(1-t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n$$

إذاً بوضع $x=0$ نحصل على :

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(0)\,t^n,\quad |t|<1$$

باستخدام مفكوك ماكوين في الطرف الأيسر نحصل على :

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{m=0}^{\infty}t^m,\quad |t|<1$$

وعليه نجد أن :

$$\sum_{m=0}^{\infty}t^m=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(0)\,t^n,\quad |t|<1$$

بأخذ معاملات t^n للطرفين نحصل على العلاقة (أ). وللحصول على العلاقة (ب) نستخدم معادلة لاجير العامة :

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n(x)+(1-x)\frac{d}{dx}L_n(x)+nL_n(x)=0$$

ونضع $x=0$ فنحصل على $$L_n'(0)+nL_n(0)=0$$

باستخدام العلاقة (أ) نحصل على $$L_n'(0)=-n$$

وعلى نمط المبرهنة السابقة يمكن للقارئ إثبات صحة العلاقة التالية :

$$L_n''(0)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

وذلك بالتفاضل مرتين للدالة المولدة فنحصل على العلاقة :

$$\frac{1}{1-t}e^{\frac{-xt}{1-t}}\cdot\left(\frac{-t}{1-t}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}L_n''(x)\,t^n$$

بوضع $x=0$ نحصل على الآتي :

$$\frac{t^2}{(1-t)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n''(0)t^n$$

باستخدام مفكوك ماكلورين في الطرف الأيسر نجد أن :

$$t^2\left\{1+3t+\frac{3\cdot4}{2!}t^2+\frac{3\cdot4\cdot5}{3!}t^3+\cdots+\frac{3\cdot4\cdot5\cdots n}{(n-2)!}t^{n-2}+\cdots\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n''(0)t^n$$

بمطابقة معاملات قوى t^n نجد أن :

$$L_n''(0)=\frac{3\cdot4\cdot5\cdots n}{(n-2)!}=\frac{n!}{2(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$$

(٧,٢) علاقات التعامد لكثيرات حدود لاجير

مبرهنة(١)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm} \qquad (٧,١٢)$$

البرهان

من مبرهنة الدالة المولدة، يمكن كتابة :

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, t^n , \qquad \frac{\exp\{-xs/(1-s)\}}{1-s} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)\, s^m$$

وعليه نحصل على :

$$\frac{1}{(1-t)(1-s)} \exp\left\{\frac{-xt}{1-t}\right\} \exp\left\{\frac{-xs}{1-s}\right\} = \sum_{n,m} L_n(x) L_m(x) t^n s^m$$

بضرب الطرفين في الدالة e^{-x} ثم نكامل ينتج الآتي :

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} t^n s^m \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = I \qquad (٧,١٣)$$

وعليه يمكن القول أن $\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx$ يمثل معامل $t^n s^m$ في التكامل I

حيث :

$$I=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t}\cdot\frac{\exp\{-xs/(1-s)\}}{1-s}dx$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\int_0^\infty \exp[-x]\cdot\exp[\frac{-xt}{1-t}]\cdot\exp[\frac{-xs}{1-s}]dx$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\int_0^\infty \exp\left\{-x\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\left[\frac{-1}{1+\{t/(1-t)\}+\{s/(1-s)\}}\exp\left\{-x\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)\right\}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1-s)}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}}$$

$$=\frac{1}{(1-t)(1-s)+t(1-s)+s(1-t)}=\frac{1}{1-st}=\sum_{n=0}^\infty s^n t^n\,,\quad |st|<1$$

وعليه تكون العلاقة (٧,١٣) كالآتي :

$$t^n s^m\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=t^n s^n$$

ومن ثم إذا كان $n\neq m$ نجد أن :

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx=0 \qquad (٧,١٤)$$

أما إذا كان $n=m$ فإن :

$$\int_0^\infty e^{-x}\{L_n(x)\}^2dx=1 \qquad (٧,١٥)$$

وهذه العلاقة يمكن الاستفادة منها بتمثيل أي دالة على شكل كثيرات حدود لاجير كالآتي : لتكن $f(x)$ معرفة لقيم x ، وعليه يمكن كتابة :

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty A_nL_n(x)$$

بتطبيق قاعدة التعامد نجد أن :

$$A_n = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(x)\, dx \qquad (٧,١٦)$$

(٧,٣) "علاقات تكرارية لدالة لاجير "

سنثبت في هذا الجزء بعض العلاقات التكرارية لدالة لاجير

مبرهنة(١)

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \qquad (٧,١٧)$$

الإثبات

حيث إن

$$\frac{1}{1-t}\exp\{-xt/(1-t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad (\diamond)$$

بتفاضل طرفي هذه العلاقة بالنسبة إلى t نجد أن :

$$\frac{1}{(1-t)^2}[-x(1-t)\frac{(1-t)+t}{(1-t)^2}\exp\{\frac{-xt}{1-t}\} + \exp\{\frac{-xt}{1-t}\}] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n(x)}{(n-1)!}t^{n-1}$$

بالاختصار نحصل على :

$$\frac{1}{(1-t)^3}[-x\exp\left\{\frac{-xt}{1-t}\right\} + (1-t)\exp\left\{\frac{-xt}{1-t}\right\}] = \sum_{n=1}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1}$$

$$\frac{1-x-t}{(1-t)^3}\exp\left\{\frac{-xt}{1-t}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} nL_n(x)t^{n-1}$$

من العلاقة الأخيرة يمكن أن يكتب الطرف الأيسر على الشكل الآتي :

$$\frac{1-x-t}{(1-t)^2}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n=\sum_{n=1}^{\infty}nL_n(x)t^{n-1}$$

بضرب الطرفين في المقدار $(1-t)^2$

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^{n+1}=(1-2t+t^2)\sum_{n=1}^{\infty}nL_n(x)t^{n-1}$$

وعليه بمطابقة قوى t^n والاختصار نحصل على :

$$(1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x)=(n+1)L_{n+1}(x)-2nL_n(x)+(n-1)L_{n-1}(x)$$

والتي تكتب على الصورة :

$$(1-x+2n)L_n(x)-nL_{n-1}(x)=(n+1)L_{n+1}(x)$$

مبرهنة(٢)

$$L_n'(x)=\left[L_{n-1}'(x)-L_{n-1}(x)\right] \qquad (٧.١٨)$$

البرهان

بتفاضل الدالة المولدة (❖) بالنسبة إلى x نحصل على :

$$\frac{-t}{(1-t)^2}\exp\left\{\frac{-xt}{1-t}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n'(x)t^n$$

أو

$$\frac{-t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}L_n'(x)t^n \qquad (❖❖)$$

بضرب الطرفين في المقدار $(1-t)$ نجد أن :

$$-\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n'(x)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}L_n'(x)t^{n+1}$$

بمطابقة قوى t^n للطرفين

$$-L_{n-1}(x)=L_n'(x)-L_{n-1}'(x)$$

وعليه نحصل على:

$$\left[L'_{n-1}(x)-L_{n-1}(x)\right]=L'_n(x)$$

يمكن للقارئ الحصول على العديد من العلاقات التكرارية من العلاقة (٧,١٨) عند التعويض عن كل n بالمقدار $n-1$.

مبرهنة (٣)

$$xL'_n(x)=nL_n(x)-nL_{n-1}(x) \qquad (٧,١٩)$$

البرهان

لإثبات صحة العلاقة (٧,١٩)، نستخدم العلاقة (٧,١٧):

$$(1+n)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x)$$

وذلك بالتفاضل بالنسبة إلى x لنجد أن :

$$(1+n)L'_{n+1}(x)=(2n+1-x)L'_n(x)-L_n(x)-nL_{n-1}(x) \qquad (٧,٢٠)$$

ثم نستخدم العلاقتين:

$$L'_{n+1}(x)=L'_n(x)-L_n(x)$$

$$L'_{n-1}(x)=L'_n(x)+L_{n-1}(x)$$

فنحصل على الآتي:

$$(n+1)\{L'_n(x)-L_n(x)\}=(2n+1-x)L'_n(x)-L_n(x)-n\{L'_n(x)-L_{n-1}(x)\}$$

بالاختصار نحصل على:

$$-nL_n(x)=-xL'_n(x)-nL_{n-1}(x)$$

ومنها نجد أن:

$$x\,L'_n(x)=n\,L_n(x)-n\,L_{n-1}(x)$$

وفيما يلي مبرهنة أخرى :

مبرهنة(٤)

$$L_n'(x)=-\sum_{r=0}^{n-1}L_r(x),\ |t|<1 \qquad (٧,٢١)$$

البرهان

بما أن :

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{r=0}^{\infty}t^r\ ,\ |t|<1 \qquad (١)$$

ومن العلاقة (❖❖) نجد أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n'(x)t^n=\frac{-t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n$$

وعليه باستخدام العلاقة (١) في العلاقة (❖❖) نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n'(x)t^n=-t\sum_{r=0}^{\infty}t^r\sum_{s=0}^{\infty}L_s(x)t^s$$

والعلاقة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n'(x)t^n=-\sum_{r,s=0}L_s(x)t^{r+s+1}$$

وللحصول على معامل t^n نلحظ أن الطرف الأيسر صريح الشكل بينما في الطرف الأيمن يجب وضع $n=r+s+1$ أو $r=n-s-1$ ، وعليه يجب أن يكون $n-s-1\geq 0$ ، أي أن $s\leq n-1$ ، وفي هذه الحالة يكون :

$$t^n\ \text{معامل}=\sum_{s=0}^{n-1}-L_s(x)$$

وعليه نحصل على :

$$L_n'(x)=-\sum_{s=0}^{n-1}L_s(x)$$

(٧,٤) دالة لاجير المساعدة

يطلق على المعادلة التفاضلية :

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(k+1-x)\frac{dy}{dx}+ny=0 \qquad (٧,٢٢)$$

معادلة لاجير المساعدة. أما إذا كانت $k=0$ فكما سبق تسمى معادلة لاجير ، والتي حلها $y=L_n(x)$. بينما يعطي حل المعادلة (٧,٢٢) بالمبرهنة التالية.

مبرهنة(١) إذا كان $z(x,s)$ حلاً لمعادلة لاجير

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+(n+k)y=0,\quad 0\le x<\infty \qquad (٧,٢٣)$$

فإن $\frac{d^kz}{dx^k}$ تحقق معادلة لاجير المساعدة.

البرهان

بما أن $z=(z,s)$ حل للمعادلة (٧,٢٣). إذاً

$$x\frac{d^2z}{dx^2}+(1-x)\frac{dz}{dx}+(n+k)z=0$$

بالتفاضل k من المرات مع تطبيق نظرية ليبنز كالآتي :

$$\left[x\frac{d^2z}{dx^2}\right]^{(k)}+\left[(1-x)\frac{dz}{dx}\right]^{(k)}+(n+k)z^{(k)}=0$$

حيث (k) ترمز إلى المشتقة التفاضلية من الرتبة k. وعليه نحصل على :

$$xz^{(k+2)}+kz^{(k+1)}+(1-x)z^{(k+1)}-kz^{(k)}+(n+k)z^{(k)}=0$$

بالاختصار نصل إلى الآتي :

$$xz^{(k+2)}+(k+1-x)z^{(k+1)}+nz^{(k)}=0$$

واضح أن المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة :

$$x\frac{d^2}{dx^2}z^{(k)}+(k+1-x)\frac{d}{dx}z^{(k)}+nz^{(k)}=0$$

وعليه ينتج أن $z^{(k)}$ تحقق المعادلة المطلوبة.

مما سبق يتضح لنا أنه إذا كانت $L_n(x)$ تحقق معادلة لاجير فإن $\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)$ تحقق معادلة لاجير المساعدة ، ومن ثم يمكن تعريف $L_n^k(x)$ كالآتي :

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x) \qquad (k<n) \qquad (٧,٢٤)$$

وهي ما تسمى بدالة لاجير المساعدة.

مبرهنة(٢)

$$L_n^k(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{(n+k)!x^r}{(n-r)!(k+r)!r!} \qquad (٧,٢٥)$$

البرهان

فيما سبق أثبتنا أن :

$$L_n(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!x^r}{(n-r)!(r!)^2}$$

وعليه بتحريك كل n بالمقدار $n+k$ نحصل على الآتي :

$$L_{n+k}(x)=\sum_{r=0}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!x^r}{(n+k-r)!(r!)^2} \qquad (٧,٢٦)$$

باستخدام العلاقة (٧,٢٤) نحصل على :

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\sum_{r=0}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!x^r}{(n+k-r)!(r!)^2}$$

نلحظ أن جميع التفاضلات التي فيها $r<k$ تنعدم ، لأن القوى الخاصة بها أقل من رتبة التفاضل ، لذلك نكتب المعادلة الأخيرة على الصورة :

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\sum_{r=k}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!x^r}{(n+k-r)!(r!)^2}$$

وإذا ما لاحظنا أن :

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{dx^k}x^r&=r(r-1)\cdots(r-k+1)x^{r-k}\\&=x^{r-k}\left[\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)(r-k)(r-k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{(r-k)(r-k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}\right]\\&=\frac{r!}{(r-k)!}x^{r-k}\end{aligned}$$

فإننا نحصل على :

$$L_n^k(x)=(-1)^k\sum_{r=k}^{n+k}(-1)^r\frac{(n+k)!x^{r-k}}{(n+k-r)!(r-k)!r!}$$

فإذا وضعنا في العلاقة الأخيرة $r-k=s$ فإننا نحصل على الآتي :

$$L_n^k(x)=(-1)^k\sum_{s=0}^{n}(-1)^{k+s}\frac{(n+k)!x^s}{(n-s)!s!(s+k)!}$$

ومن ثم نحصل على الآتي :

$$L_n^k(x)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{(n+k)!x^s}{(n-s)!(s+k)!s!}$$

ملاحظة : يمكن الحصول على بعض النتائج البسيطة ومنها

$$L_1'(x)=-1,\qquad L_2'(x)=-4+2x,\qquad L_2^2(x)=2$$

وفيما يلي خواص دالة لاجير المساعدة والمبرهنة الآتية :

مبرهنة(٣) الدالة المولدة لدالة لاجير المساعدة تأخذ الشكل :

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^k(x)t^n \qquad (٧.٢٧)$$

البرهان

فيما سبق أثبتنا أن :

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

بالتفاضل k من المرات ينتج أن :

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)}\right] = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad (k<n)$$

ونتيجة لانعدام جميع التفاضلات أقل من الرتبة k في الطرف الأيمن من المعادلة الأخيرة يمكن أن نكتبها على الشكل :

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)}\right] = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=k}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad (\text{❖})$$

بوضع $n-k=s$ في الطرف الأيمن نحصل على :

$$\frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=k}^{\infty} L_n(x)t^n = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{s=0}^{\infty} L_{k+s}(x)t^{s+k} = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+k}(x)t^{n+k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k L_n^k(x)t^{n+k}$$

باستخدام العلاقة (٧،٢٤)، يمكن أن نكتب المعادلة (❖) كالآتي :

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k L_n^k(x)t^{n+k}$$

بتفاضل الطرف الأيسر k من المرات نحصل على :

$$\frac{(-1)^k}{(1-t)^{k+1}}\left[\exp\left\{\frac{-xt}{1-t}\right\}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k L_n^k(x)t^{n+k}$$

ملاحظة: يمكن للقارئ إثبات الآتي :

$$(1)\ L_n^k(x)=\frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+k}e^{-x}\right) \qquad (٧.٢٨)$$

وعلاقة التعامد الآتية :

$$(2)\ \int_0^\infty e^{-x}x^k L_n^k(x)L_m^k(x)dx=\frac{(n+k)!}{n!}\delta_{nm} \qquad (٧.٢٩)$$

(٧,٥) "علاقات تكرارية لدالة لاجير المساعدة"

سنركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة بعض العلاقات التكرارية لدالة لاجير المساعدة .

مبرهنة(١)

$$L_{n-1}^k(x)+L_n^{k-1}(x)=L_n^k(x) \qquad (٧.٣٠)$$

البرهان باستخدام العلاقة (٧.٢٥)

$$L_n^k(x)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{(n+k)!x^r}{(n-r)!(k+r)!r!}$$

نجد أن :

$$L_{n-1}^k(x)+L_n^{k-1}(x)=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{(n-1+k)!x^r}{(n-1-r)!(k+r)!r!}+\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{(n+k-1)!x^r}{(n-r)!(k-1+r)!r!}$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{(n+k-1)!x^r}{(n-r-1)!(k+r)!r!}$$

$$+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{(n+k-1)!x^r}{(n-r)!(k+r-1)!r!}+(-1)^n\frac{(n+k-1)!x^n}{(n-n)!(k-1+n)!n!}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!x^r}{(n-r-1)!(k+r-1)!r!}\{\frac{1}{k+r}+\frac{1}{n-r}\}+(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$=(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{(n+k-1)!x^r}{(n-r-1)!(k+r-1)!r!}\left\{\frac{(n-r)+(k+r)}{(k+r)(n-r)}\right\}$$

$$=(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{(n+k)(n+k-1)!x^r}{(n-r-1)!(k+r-1)!r!(k+r)(n-r)}$$

$$=(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{(n+k)!x^r}{(n-r)!(k+r)!r!}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{(n+k)!x^r}{(n-r)!(k+r)!r!}$$

مبرهنة(٢)

$$(n+1)L_{n+1}^k(x)=(2n+k+1-x)L_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x) \qquad (٧،٣١)$$

البرهان

من العلاقة (٧،١٧)

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x)$$

عند التعويض عن n بالمقدار $n+k$ في العلاقة السابقة نحصل على الآتي:

$$(n+k+1)L_{n+k+1}(x)=(2n+2k+1)L_{n+k}(x)-xL_{n+k}(x)-(n+k)L_{n+k-1}(x)$$

بتفاضل المعادلة الأخيرة k من المرات، نجد أن:

$$(n+k+1)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k+1}(x)=(2n+2k+1)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)$$
$$-\frac{d^k}{dx^k}\{xL_{n+k}(x)\}-(n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k-1}(x)$$

وتطبيق مبرهنة ليبنز ينتج لدينا :

$$(n+k+1)L^{(k)}_{n+k+1}(x) = (2n+2k+1)L^{(k)}_{n+k}(x) - xL^{(k)}_{n+k}(x) - kL^{(k-1)}_{n+k}(x)$$
$$-(n+k)L^{(k)}_{n+k-1}(x)$$

باستخدام العلاقة : $L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) = (-1)^k L^k_{n+k}(x)$ ، نجد أن :

$$(n+k+1)(-1)^k L^k_{n+1}(x) = (2n+2k+1)(-1)^k L^k_n(x) -$$
$$-(-1)^k xL^k_n(x) - (-1)^{k-1} kL^{k-1}_{n+1}(x) - (-1)^k (n+k)L^k_{n-1}(x)$$

بالاختصار مع استخدام العلاقة (٧,٣٠) نحصل على :

$$(n+k+1)L^k_{n+1}(x) = (2n+2k+1)L^k_n(x) - xL^k_n(x) + \quad (❖)$$
$$+ k\left[L^k_{n+1}(x) - L^k_n(x)\right] - (n+k)L^k_{n-1}(x)$$

وعليه يمكن كتابة (❖) على الشكل الآتي :

$$(n+k+1)L^k_{n+1}(x) = (2n+2k+1-x)L^k_n(x) + kL^{k-1}_{n+1}(x) - (n+k)L^k_{n-1}(x)$$
$$= (2n+k+1-x)L^k_n(x) + k\left(L^k_n(x) + L^{k-1}_{n+1}(x)\right) - (n+k)L^k_{n-1}(x)$$

بتطبيق العلاقة (٧,٣٠) مرة أخرى بعد تبديل كل n بالمقدار $n+1$ نجد أن :

$$(n+k+1)L^k_{n+1}(x) = (2n+k+1-x)L^k_n(x) + kL^k_{n+1}(x) - (n+k)L^k_{n-1}(x)$$

بالاختصار نحصل على :

$$(n+1)L^k_{n+1}(x) = (2n+k+1-x)L^k_n(x) - (n+k)L^k_{n-1}(x)$$

مبرهنة(٣)

$$x\frac{d}{dx}L^k_n(x) = nL^k_n(x) - (n+k)L^k_{n-1}(x) \qquad (٧,٣٢)$$

البرهان باستخدام العلاقة (٧,١٩) $\left(xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)\right)$ مع تحريك n بالمقدار $n+k$ نحصل على :

$$xL'_{n+k}(x) = (n+k)L_{n+k}(x) - (n+k)L_{n+k-1}(x)$$

ثم التفاضل k من المرات :

$$\frac{d^k}{dx^k}\{xL'_{n+k}(x)\}=(n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)-(n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k-1}(x)$$

مع استخدام العلاقة :

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)$$

نحصل على :

$$x\frac{d}{dx}L_n^k(x)+kL_n^k(x)=(n+k)L_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x)$$

ومن ثم بالاختصار نجد أن :

$$x\frac{d}{dx}L_n^k(x)=nL_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x)$$

مبرهنة(٤)

$$\frac{d}{dx}L_n^k(x)=-\sum_{r=0}^{n-1}L_r^k(x) \qquad (٧,٣٣)$$

البرهان باستخدام العلاقة (٧,٢١)

$$L'_n(x)=-\sum_{r=0}^{n-1}L_r(x)$$

وبالتعويض عن n بالمقدار $n+k$ ثم التفاضل k من المرات نجد أن :

$$\frac{d^k}{dx^k}L'_{n+k}(x)=-\sum_{r=0}^{n+k-1}\frac{d^k}{dx^k}L_r(x)$$

ثم تطبيق العلاقة (٧,٢٤) ص ٢١٨ نجد أن :

$$(-1)^k\frac{d}{dx}\left(L_n^k(x)\right)=-\sum_{r=k}^{n+k-1}\frac{d^k}{dx^k}L_r(x)$$

ونتيجة لانعدام جميع المشتقات التي فيها $r<k$ في الطرف الأيمن عند وضع $r=k+s$ نحصل على الآتي :

$$(-1)^k \frac{d}{dx}\left(L_n^k(x)\right) = -\sum_{s=0}^{n-1} \frac{d^k}{dx^k} L_{s+k}(x)$$

وبتطبيق العلاقة (٧،٢٤) مرة أخرى نحصل على :

$$\frac{d}{dx}\left(L_n^k(x)\right) = -\sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x)$$

مبرهنة(٥)

$$\frac{d}{dx}\left(L_n^k(x)\right) = -L_{n-1}^{k+1}(x) \qquad (٧،٣٤)$$

البرهان باستخدام تعريف دالة لاجير المساعدة والتفاضل نجد أن :

$$\frac{d}{dx}\left(L_n^k(x)\right) = \frac{d}{dx}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(n+k)!x^r}{(n-r)!(k+r)!r!}$$

$$= \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \frac{(n+k)!x^{r-1}}{(n-r)!(k+r)!(r-1)!}$$

وبوضع $r = 1+s$ نصل إلى :

$$\frac{d}{dx}\left(L_n^k(x)\right) = \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{1+s} \frac{(n+k)!x^r}{(n-s-1)!(k+s+1)!s!}$$

يمكن كتابة الطرف الأيمن على الصورة :

$$\frac{d}{dx}\left(L_n^k(x)\right) = -\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s \frac{[n-1+(k+1)]!x^r}{[(n-1)-s]!(k+s+1)!s!}$$

مع استخدام تعريف دالة لاجير المساعدة نحصل على :

$$\frac{d}{dx}(L_n^k(x)) = -L_{n-1}^{k+1}(x)$$

مبرهنة(٦)

$$L_n^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} L_r^k(x) \qquad (٧،٣٥)$$

البرهان بمقارنة العلاقتين (٧،٣٤)، (٧،٣٣) نحصل على الآتي:

$$\sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x) = L_{n-1}^{k+1}(x)$$

وعند تبديل n بالمقدار $n+1$ نجد أن:

$$L_n^{k+1}(x) = \sum_{r=0}^{n} L_r^k(x)$$

ملحوظة هامة: في كثير من الكتب الدارسية للدوال الخاصة نلحظ أن دالة لاجير تعرف على الصورة:

$$\frac{1}{(1-t)} \exp\left\{\frac{-xt}{1-t}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

وعليه يكون:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \ell_n(x)$$

والآن إلى الأمثلة الآتية:

مثال(١) أثبت أن:

$$\int_t^{\infty} e^{-x} L_n^k(x)dx = e^{-t}\left[L_n^k(t) - L_{n-1}^k(t)\right] \qquad (٧،٣٦)$$

الإثبات بتكامل الطرف الأيسر بالتجزيء:

$$I = \left[-e^{-x} L_n^k(x)\right]_t^{\infty} - \int_t^{\infty} (-e^{-x}) L_n^{k'}(x)dx$$

$$= e^{-t} L_n^k(t) + \int_t^{\infty} e^{-x} L_n^{k'}(x)dx$$

باستخدام العلاقة (٧,٣٣) نجد أن :

$$I = e^{-t}L_n^k(t) - \int_t^{\infty} e^{-x}\{\sum_{r=0}^{n-1} L_r^k(x)\}dx = e^{-t}L_n^k(t) - \sum_{r=0}^{n-1}\int_t^{\infty} e^{-x}L_r^k(x)dx$$

بالتعويض عن قيمة I من المعادلة (٧,٣٦) نجد أن :

$$\int_t^{\infty} e^{-x}L_n^k(x)dx + \sum_{r=0}^{n-1}\int_t^{\infty} e^{-x}L_r^k(x)dx = e^{-t}L_n^k(t)$$

بجمع الطرف الأيسر نحصل على :

$$\sum_{r=0}^{n}\int_t^{\infty} e^{-x}L_r^k(x)dx = e^{-t}L_n^k(t) \quad (\diamond)$$

وحيث إن :

$$e^{-x}L_n^k(t) = \sum_{r=0}^{n} e^{-x}L_r^k(x) - \sum_{r=0}^{n-1} e^{-x}L_r^k(x)$$

إذاً :

$$\int_t^{\infty} e^{-x}L_n^k(x)dx = \sum_{r=0}^{n}\int_t^{\infty} e^{-x}L_r^k(x)dx - \sum_{r=0}^{n-1}\int_t^{\infty} e^{-x}L_r^k(x)dx$$

وباستخدام العلاقة ($\diamond$) نحصل على :

$$\int_t^{\infty} e^{-x}L_n^k(x)dx = e^{-t}L_n^k(t) - e^{-t}L_{n-1}^k(t) = e^{-t}\left\{L_n^k(t) - L_{n-1}^k(t)\right\}$$

مثال(٢) أثبت أن :

$$L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y) = \sum_{r=0}^{n} L_r^{(\alpha)}(x)L_{n-r}^{\beta}(y) \qquad (٧,٣٧)$$

الإثبات لإثبات ذلك نستخدم تعريف دالة لاجير المساعدة :

$$\frac{1}{(1-t)^{k+1}}\exp\left\{\frac{-xt}{(1-t)}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^k(x)$$

على الشكل الآتي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y)t^n = \frac{\exp\{-(x+y)t/(1-t)\}}{(1-t)^{\alpha+\beta+2}}$$

وعليه يكون $L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y)$ يمثل معامل t^n في المفكوك:

$$\frac{\exp\{-(x+y)t/(1-t)\}}{(1-t)^{\alpha+\beta+2}}$$

بكتابة هذا المفكوك على الصورة :

$$\frac{\exp\{-(x+y)t/(1-t)\}}{(1-t)^{\alpha+\beta+2}} = \frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{(1-t)^{\alpha+1}} \cdot \frac{\exp\{-yt/(1-t)\}}{(1-t)^{\beta+1}}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} L_r^{\alpha}(x)t^r \sum_{s=0}^{\infty} L_s^{\beta}(y)t^s$$

$$= \sum_{r,s=0} L_r^{\alpha}(x) \cdot L_s^{\beta}(y)t^{r+s}$$

وعليه للحصول على معامل t^n نضع $r+s=n$ ، حيث $r \le n$ فنحصل على:

$$\text{معامل } t^n = \sum_{r=0}^{n} L_r^{\alpha}(x) \cdot L_{n-r}^{\beta}(y)$$

مثال(٣) أثبت أن:

$$J_m\{2\sqrt{xt}\} = e^{-t}(xt)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^m(x)t^n}{(n+m)!} \qquad (٧,٣٨)$$

حيث $J_m(y)$ دالة بسل من النوع الأول والرتبة m.

الإثبات من تعريف دالة بسل نجد أن :

$$J_m\{2\sqrt{xt}\} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(m+r)!} \left\{\frac{2\sqrt{xt}}{2}\right\}^{2r+m} \qquad (٧,٣٩)$$

بضرب طرفي العلاقة (٧,٣٩) في المقدار $e^t (xt)^{-\frac{m}{2}}$ نجد أن :

$$e^t (xt)^{-\frac{m}{2}} J_m \{2\sqrt{xt}\} = e^t (xt)^{-\frac{m}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(m+r)!} \{xt\}^{r+\frac{m}{2}}$$

$$= e^t \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(m+r)!} \{xt\}^r$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!(m+r)!} x^r t^r$$

وعليه نحصل على العلاقة :

$$e^t (xt)^{-\frac{m}{2}} J_m \{2\sqrt{xt}\} = \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^r t^{s+r}}{r!(m+r)!s!}$$

لإيجاد الطرف الأيمن في قوى t^n نأخذ $s+r=n$ تحت الشرط $r \le n$ فنجد أن :

$$e^t (xt)^{-\frac{m}{2}} J_m \{2\sqrt{xt}\} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^r t^n}{r!(m+r)!(n-r)!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(n+m)! x^r t^n}{(n+m)! r!(m+r)!(n-r)!} = \frac{1}{(n+m)!} L_n^m (x)$$

تمـــــارين

١. أوجد L_4 ثم أثبت أنها تحقق معادلة لاجير التفاضلية عند $n=4$.

٢. عبر عن الدوال الآتية ككثيرات حدود لدالة لاجير:

(أ) $f(x)=7$ ، (ب) $f(x)=x$ ، (ج) $f(x)=x^3-3x^2+2x$

٣. أوجد الحل العام لمعادلة لاجير في الحالات الآتية :

(أ) $n=0$ ، (ب) $n=1$ ، (ج) $n=2$

٤. أثبت أن $L_n''(0)=\frac{1}{2}n(n-1)$ ومن ثم احسب $L_n^{(3)}(0)$, $L_n^{(4)}(0)$.

٥. أثبت صحة العلاقات الآتية :

(أ) $$\int_0^\infty e^{-x} x^k L_n(x)dx = \begin{cases} 0 & k<n \\ (-1)^n n! & k=n \end{cases}$$

(ب) $$\int_0^x (x-t)^m L_n(t)dt = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} x^{m+1} L_n^{m+1}(x)$$

(ج) $$L_n^k(x) = (-1)^n \frac{2^{2k} k!(n+k)!}{\pi(2k)!(2n)!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{k-\frac{1}{2}} H_{2n}\{(\sqrt{x})t\}dt$$

(د) $$n! \frac{d^m}{dx^m}\left\{e^{-x} x^k L_n^k(x)\right\} = (m+n)! e^{-x} x^{k-m} L_{m+n}^{k-m}(x)$$

(هـ) $$\int_0^\infty e^{-x} x^{k+1} \left\{L_n^k(x)\right\}^2 dx = \frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1)$$

٦. أثبت صحة الآتي :

(أ) $$L_n^{\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1} n! x} H_{2n+1}(\sqrt{x})$$

(ب) $$L_n^{-\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \frac{1}{2^{2n} n!} H_{2n}(\sqrt{x})$$

الفصل الثامن

الدوال فوق الهندسية
Hypergeometric Functions

درست المعادلة فوق الهندسية $x(1-x)\,y'' + [\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$ من قبل أويلر، أما تسميتها بفوق الهندسية فتعود إلى باف (١٧٦٥- ١٨٢٥). وظهرت دراسة الحلول والكثير من خواص الدوال فوق الهندسية في أعمال جاوس (١٧٧٧- ١٨٥٥)، ولهذا سُميت معادلة جاوس فوق الهندسية. وتكمن أهمية هذا النوع من الدوال في كثرة تطبيقاتها إضافة إلى إمكانية التعبير عن الكثير من الدوال الخاصة بدلالتها. ويضم هذا الفصل أربعة بنود ندرس فيها تعريف الدوال فوق الهندسية وبعض الحالات الخاصة منها وخواصها وعلاقة الدوال فوق الهندسية بالدوال الخاصة الأخرى، إضافة إلى معادلة جاوس التفاضلية والعلاقات المتشابهة.

(٨,١) "تعريف الدالة فوق الهندسية وبعض الحالات الخاصة"

أولاً إذا كان α, r أعداداً طبيعية فيعرّف الرمز $(\alpha)_r$ والذي يسمى رمز بوشمر (Pochhammer symbol) كالآتي :

$$(\alpha)_r = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r-1) \tag{٨,١}$$

وقد يكتب على الشكل التالي :

$$\begin{aligned}(\alpha)_r &= \frac{1\cdot 2\cdots(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r-1)}{1\cdot 2\cdots(\alpha-1)} \\ &= \frac{(\alpha+r-1)!}{(\alpha-1)!} = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\end{aligned} \tag{٨,٢}$$

حيث $\Gamma(\cdot)$ دالة جاما.

مثال(١)

$$(\alpha)_0 = 1 \qquad ,(\alpha)_2 = \alpha(\alpha+1) \qquad ,(1)_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5!$$

ويرمز للدالة فوق الهندسية (دالة جاوس) بـ

$${}_mF_n(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n;x) \tag{٨,٣}$$

وتعرّف كالآتي :

$${}_mF_n(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n;x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r\cdots(\alpha_m)_r}{(\beta_1)_r(\beta_2)_r\cdots(\beta_n)_r}\frac{x^r}{r!} \tag{٨,٤}$$

ونورد فيما يلي بعض الحالات الخاصة والمشتقة من كثيرات حدود جاوس :

(أ) عندما $m = n = 1$ نحصل على الدالة :

$$\begin{aligned}{}_1F_1(\alpha;\gamma;z) &= 1 + \frac{\alpha}{\gamma!}z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)3!}z^3 + \cdots \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r z^r}{(\gamma)_r r!}\end{aligned}$$

(ب) عندما $n = 1, m = 2$ نحصل على الدالة :

$${}_2F_1(\alpha_1,\alpha_2,\beta;x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r}{(\beta)_r r!}x^r \tag{٨,٥}$$

وإذا فرضنا أن $u_r = \frac{(\alpha_1)_r (\alpha_2)_r}{(\beta)_r\ r!}$ ، فإن :

$$\left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right| = \left|\frac{(\alpha_1 + r)\ (\alpha_2 + r)}{(\beta + r)\ (1+r)}\right|$$

وعندما $r \to \infty$ فإن $\left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right| \to |x|$

وعليه فإن المتسلسلة (٨,٥) متقاربة عندما $|x| < 1$ ومتباعدة عندما $|x| > 1$.

مثال(٢) أثبت أن :

$$_2F_1(1,1;2;-z) = \frac{1}{z}\ln(1+z)$$

الإثبات باستخدام مفكوك $\ln(1+z)$

$$\ln(1+z) = \int \frac{dz}{1+z} = \int (1+z)^{-1}\,dz = \int (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \cdots)\,dz$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots$$

وعليه نجد أن :

$$\frac{1}{z}\ln(1+z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots$$

ومن تعريف كثيرة حدود جاوس ، نجد أن :

$$_2F_1(1,1;2;-z) = 1 + \frac{(1)(1)}{(2)1!}(-z) + \frac{(1\cdot 2)\cdot(1\cdot 2)}{(2\cdot 3)2!}(-z)^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{(2\cdot 3\cdot 4)3!}(-z)^3 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots$$

مثال(٣) أثبت أن :

$$ {}_2F_1(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};z^2)=\frac{\sin^{-1}z}{z} $$

الإثبات بحساب مفكوك $\sin^{-1}z$

$$ \sin^{-1}z=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int_0^z(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}dz $$

وحيث إن :

$$ (1-z^2)^{\frac{-1}{2}}=1+(\frac{-1}{2})(-z^2)+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(-z^2)^2}{2!}+\frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})(\frac{-5}{2})(-z^2)^3}{3!}+\cdots $$

$$ =1+\frac{1}{2}z^2+\frac{3}{(4)2!}z^4+\frac{(3)(5)}{(2\cdot4)3!}z^6+\cdots $$

وبناء على ذلك نحصل على :

$$ \int_0^z(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}dz=z+\frac{1}{(2)(3)}z^3+\frac{3}{(4)(5)(2!)}z^5+\frac{3\times5}{(2)(4)(7)3!}z^7+\cdots $$

ومن ثم نجد أن :

$$ \frac{\sin^{-1}z}{z}=1+\frac{1}{(2)(3)}z^2+\frac{3}{(4)(5)2!}z^4+\frac{3\times5}{(2)(4)(7)3!}z^6+\cdots $$

لكن

$$ {}_2F_1(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};z^2)=1+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{(\frac{3}{2})1!}z^2+\frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})}{(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})2!}(z^2)^2 $$

$$ +\frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})}{(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})(\frac{7}{2})3!}(z^2)^3+\cdots $$

$$ =1+\frac{1}{(2\cdot3)}z^2+\frac{3}{(4\cdot5)2!}z^4+\frac{(3\cdot5)}{(2\cdot4\cdot7)3!}z^6+\cdots $$

مثال(٤) أثبت صحة العلاقة :

$$ {}_2F_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};-z^2)=\frac{\tan^{-1} z}{z} $$

الإثبات : حيث إن :

$$ \tan^{-1} z=\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}=\int_0^z [1+(-z^2)+\frac{(-1)(-2)z^2}{2!}+\frac{(-1)(-2)(-3)z^6}{3!}+\cdots]dz $$

$$ =\int_0^z [1-z^2+z^4-z^6+\cdots]dz=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\cdots $$

وعليه فإن :

$$ \frac{\tan^{-1} z}{z}=1-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}-\frac{z^6}{7}+\cdots $$

ومن تعريف الدالة فوق الهندسية نجد أن :

$$ {}_2F_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};-z^2)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(1)_r(\frac{1}{2})_r}{(\frac{3}{2})_r\, r!}(-z^2)^r $$

$$ =1+\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}(1!)}(-z^2)+\frac{1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})2!}(-z^2)^2 $$

$$ +\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})(\frac{7}{2})3!}(-z^2)^3+\cdots $$

بالاختصار نحصل على :

$$ {}_2F_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};-z^2)=1-\frac{z^2}{3}+\frac{z^4}{5}-\frac{z^6}{7}+\cdots=\frac{\tan^{-1} z}{z} $$

(٨,٢). "بعض خواص دالة جاوس (فوق الهندسية)"

أولاً: دالة جاوس تحقق الخاصية التالية

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = {}_2F_1(\beta,\alpha;\gamma;z)$$

الإثبات

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r\, r!}z^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\beta)_r(\alpha)_r}{r!(\gamma)_r}z^r = {}_2F_1(\beta,\alpha;\gamma;z)
\end{aligned}
$$

ثانياً: الدالة فوق الهندسية تحقق المعادلة التفاضلية الآتية

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \qquad (٨,٧)$$

ومن ثم فإن الدالة ${}_2F_1(\alpha,\nu;\gamma;z)$ تمثل حلاً للمعادلة (٨,٧) مادامت γ عدداً صحيحاً. أما إذا كانت γ عدداً غير صحيح فإن الحل الآخر للمعادلة يكون على الصورة $x^{1-\gamma}\,{}_2F_1(\alpha+1-\gamma,\upsilon+1-\gamma;2-\gamma;x)$

ويمكن للقارئ استنتاج ذلك باستخدام طريقة فروبينس وإثبات أن للمعادلة المساعدة جذرين هما $s=1-\gamma, s=0$ ثم الحل كما سبق ووضحنا في الباب الأول.

ثالثاً: مبرهنة جاوس فوق الهندسية التكاملية

الدالة فوق الهندسية تأخذ الشكل التكاملي الآتي :

$${}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\upsilon-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt, \quad \gamma>\upsilon>0 \qquad (٨,٨)$$

واضح أن هذه العلاقة ترتبط بدالتي بيتا وجاما لذلك سنوليها بعض الاهتمام.

البرهان

من تعريف الدالة

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\upsilon)_r}{(\gamma)_r r!}x^r $$

ومن العلاقة (٨،٢) نحصل على :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\upsilon+r)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma+r)}\frac{x^r}{r!} $$

هذه العلاقة يمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\gamma-\upsilon)\Gamma(\upsilon+r)}{\Gamma(\gamma+r)r!}x^r $$

لكن

$$ \beta(n,m)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \qquad (٨،٩) $$

إذاً عندما $n=\gamma-\upsilon$, $m=\upsilon+r$ نجد أن :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\sum_{r=0}^{\infty}\Gamma(\alpha+r)\beta(\alpha-\upsilon,\upsilon+r)\frac{x^r}{r!} \qquad (٨،١٠) $$

العلاقة (٨،١٠) تبقى صحيحة طالما تحقق الشرطان $\upsilon+r>0,\gamma-\upsilon>0$ باستخدام تعريف دالة بيتا :

$$ \beta(n,m)=\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1}\,dt \qquad (٨،١١) $$

يمكن كتابة المعادلة (٨،١٠) على الصورة التالية :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\sum_{r=0}^{\infty}\Gamma(\alpha+r)\{\int_0^1(1-t)^{\gamma-\upsilon-1}t^{\upsilon+r-1}dt\}\frac{x^r}{r!} $$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\int_0^1(1-t)^{\gamma-\upsilon-1}t^{\upsilon-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(xt)^r}{r!}dt \quad (٨,١٢)$$

وحيث إنْ :

$$\frac{1}{(1-xt)^{\alpha}}=1+\frac{\alpha}{1!}xt+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(xt)^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}(xt)^3+\cdots$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\frac{(xt)^r}{r!}$$

وعليه تتحول المعادلة (٨,١٢) إلى الصورة :

$${}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\int_0^1(1-t)^{\gamma-\upsilon-1}t^{\upsilon-1}(1-xt)^{-\alpha}dt$$

ملاحظة: يمكن اشتقاق كثير من الحالات الخاصة من مبرهنة جاوس كالآتي :

(أ) عند وضع $x=1$ في العلاقة (٨,٨) نحصل على :

$${}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\int_0^1 t^{\upsilon-1}(1-t)^{\gamma-\upsilon-1}(1-t)^{-\alpha}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\int_0^1 t^{\upsilon-1}(1-t)^{\gamma-\upsilon-\alpha-1}dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\beta(\upsilon,\gamma-\upsilon-\alpha)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\cdot\frac{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

ومن ثم نصل إلى العلاقة :

$${}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\upsilon-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\upsilon)\Gamma(\gamma-\alpha)}, \quad (٨,١٣)$$

$$\mathrm{Re}(\gamma)>0,\ \mathrm{Re}(\gamma-\nu-\alpha)>0$$

(ب) عند وضع $x=-1,\ \ \gamma=1+\upsilon-\alpha$ نحصل على :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon,1+\upsilon-\alpha;-1)=\frac{\Gamma(1+\upsilon-\alpha)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 t^{\upsilon-1}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\alpha}dt $$

$$ =\frac{\Gamma(1+\upsilon-\alpha)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 t^{\upsilon-1}(1-t^2)^{-\alpha}dt $$

فإذا فرضنا $t^2=u$ فإننا نحصل على الآتي :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon,1+\upsilon-\alpha;-1)=\frac{\Gamma(1+\upsilon-\alpha)}{2\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 u^{\frac{\upsilon}{2}-1}(1-u)^{-\alpha}du $$

$$ =\frac{\Gamma(1+\upsilon-\alpha)}{2\Gamma(\upsilon)\Gamma(1-\alpha)}\beta(\frac{\upsilon}{2},1-\alpha) $$

باستخدام دالة جاما نصل إلى :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;1+\upsilon-\alpha;-1)=\frac{\Gamma(1+\upsilon-\alpha)}{2\Gamma(\upsilon)\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\upsilon}{2})\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\frac{\upsilon}{2}-\alpha)} $$

$$ =\frac{\Gamma(1+\upsilon-\alpha)\Gamma(\frac{\upsilon}{2})}{2\Gamma(\upsilon)\Gamma(1+\frac{\upsilon}{2}-\alpha)} $$

بضرب البسط والمقام في υ واستخدام العلاقة $n\Gamma(n)=\Gamma(n+1)$ نصل إلى العلاقة :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;1+\upsilon-\alpha;-1)=\frac{\Gamma(1+\upsilon-\alpha)\Gamma(1+\frac{\upsilon}{2})}{\Gamma(1+\upsilon)\Gamma(1+\frac{\upsilon}{2}-\alpha)} \qquad (٨.١٤) $$

(ج) بتبديل υ,α في المعادلة (٨.١٤) نحصل على :

$$ {}_2F_1(\upsilon,\alpha;1+\upsilon-\alpha;-1)=\frac{\Gamma(1+\alpha-\upsilon)\Gamma(1+\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(1+\upsilon)\Gamma(1+\frac{\alpha}{2}-\upsilon)} \qquad (٨.١٥) $$

(د) تظهر أهمية مبرهنة جاوس في سرعة إعطاء النتائج بدلالة التكامل، فمثلاً :

$$ {}_2F_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};-z^2)=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1+tz^2)^{-1}dt $$

وبوضع $tz^2=y^2$ نحصل على :

$$ {}_2F_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};-z^2)=\frac{1}{2}\frac{z}{z^2}\cdot 2\int_0^z\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{z}\Big[\tan^{-1}y\Big]_0^z $$

وعليه نصل إلى :

$$ {}_2F_1(1,\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};-z^2)=\frac{1}{z}\tan^{-1}z $$

وهو ما أثبت سابقاً.

(٨,٣) "علاقة الدالة فوق الهندسية بالدوال الخاصة الأخرى "

أولاً: العلاقة بين الدالة فوق الهندسية ودالة لجندر هي:

$$ P_n(x)={}_2F_1(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2}) \qquad (٨,١٦) $$

الإثبات : باستخدام التعريف العام للدالة فوق الهندسية

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r r!}z^r $$

نجد أن

$$ {}_2F_1(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2})=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-n)_r(n+1)_r}{(1)_r}\cdot\frac{\{\frac{1-x}{2}\}^r}{r!} \qquad (٨,١٧) $$

وحيث إن

$$ \begin{aligned}(-n)_r&=(-n)(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+r-1)\\ &=(-1)^r n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\\ &=\frac{(-1)^r n!}{(n-r)!} \qquad \text{لكل } n\le r \qquad (٨,١٨)\end{aligned} $$

أما إذا كانت $r\ge n+1$ فإن $(-n)_r=0$. كما أن :

$$ (n+1)_r=(n+1)(n+2)\cdots(n+r)=\frac{(n+r)!}{n!} \qquad (٨,١٩) $$

وبالطريقة نفسها نصل إلى $(1)_r = r!$ ، وعليه باستخدام هذه العلاقات في المعادلة (٨,١٧) نجد أن :

$$
{}_2F_1(-n,n+1;1;\frac{1-z}{2}) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{n!}{(n-r)!}\frac{(n+r)!}{n!}\frac{1}{r!}\frac{(1-x)^r}{2^r r!}
$$

$$
= \sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r}{2^r}\frac{(n+r)!}{(n-r)!(r!)^2}(1-x)^r
$$

ومن ثم نجد أن :

$$
{}_2F_1(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2}) = \sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{2^r(n-r)!(r!)^2}(x-1)^r \qquad (٨,٢٠)
$$

ولإثبات أن هذه هي العلاقة الرابطة بالدالة $P_n(x)$ فإننا سوف نكتب $P_n(x)$ كمتسلسلة قوى في المقدار $(x-1)$ حيث :

$$
P_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} P_n^{(r)}(1)\frac{(x-1)^r}{r!} \qquad (٨,٢١)
$$

حيث $P_n^{(r)}(1)$ يقصد بها التفاضل من الرتبة r بالنسبة للدالة $P_n(x)$ عند $x=1$ ولحساب $P_n^{(r)}(1)$ نستخدم العلاقة العامة التالية :

$$
\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n \qquad (٨,٢٢)
$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x ، r من المرات نحصل على الآتي :

$$
\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(r)}(x)\, t^n = \frac{d^r}{dx^r}(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}
$$

$$
=(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)(-2t)^r(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}-r}
$$

$$
=2^r t^r \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\cdots(\frac{1}{2}+r-1)(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}-r}
$$

$$
=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r-1)t^r(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}-r}
$$

إذاً

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(r)}(x)\, t^n = \frac{(2r)!}{2^r r!} t^r (1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}-r} \qquad (٨,٢٣)$$

وبوضع $x=1$ في العلاقة (٨,٢٣) نحصل على الآتي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(r)}(1)\, t^n = \frac{t^r (2r)!}{2^r r!}(1-2t+t^2)^{-\frac{1}{2}-r} = \frac{t^r (2r)!}{2^r r!}(1-t)^{-\frac{1}{2}-r}$$

وبحساب مفكوك المقدار $(1-t)^{-1-2r}$ نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(r)}(1) t^n = \frac{t^r (2r)!}{2^r r!}$$

$$\left\{1+(1+2r)t+\frac{(2r+1)(2r+2)}{2!}t^2+\frac{(2r+1)(2r+2)(2r+3)}{3!}t^3+\cdots\right\}$$

$$= \frac{t^r (2r)!}{2^r r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r+s)!}{(2r)!s!}t^s = \frac{1}{2^r r!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(2r+s)!}{s!}t^{r+s}$$

وبوضع $n=r+s$ نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(r)}(1)\; t^n = \frac{1}{2^r r!}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{(r+n)!}{(n-r)!}t^n$$

بمطابقة المعاملات نجد أن

$$P_n^{(r)}(1) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^r r!}\dfrac{(r+n)!}{(n-r)!} & n \geq r \\ 0 & n \leq r \end{cases} \qquad (٨,٢٤)$$

ومن العلاقتين (٨,٢٣)، (٨,٢١) نحصل على :

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{2^r r!}\frac{(n+r)!}{(n-r)!}\frac{(x-1)^r}{r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{2^r (n-r)!(r!)^2}(x-1)^r = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$$

بنفس الخطوات السابقة يمكن إثبات صحة العلاقات الآتية :

ثانياً: العلاقة بين الدالة فوق الهندسية ومعادلة لجندر المساعدة

$$P_n^m(x)=\frac{(n+m)!(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{(n-m)!\quad 2^m m!}{}_2F_1(m-n,m+n+1;m+1;\frac{1-x}{2}) \quad (٨،٢٥)$$

ثالثاً: العلاقة بين الدالة فوق الهندسية وكثيرات حدود شبشف

$$T_n(x)={}_2F_1(-n,n;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}),$$

$$U_n(x)=\sqrt{1-x^2}\,n\cdot{}_2F_1(-n+1,n+1;\frac{3}{2};\frac{1-x}{2}) \quad (٨،٢٦)$$

رابعاً: العلاقة بين الدالة فوق الهندسية ودالة بسل هي:

$$J_n(x)=\frac{e^{-ix}}{n!}\left(\frac{x}{2}\right){}_1F_1(n+\tfrac{1}{2};2n+1;2ix),\quad i=\sqrt{-1} \quad (٨،٢٧)$$

خامساً: علاقة الدالة فوق الهندسية مع دالة لاجير ودالة لاجير المساعدة هي:

$$L_n(x)={}_1F_1(-n;1;x)\quad , (٨،٢٨)$$

$$L_n^k(x)=\frac{\Gamma(n+k+1)}{n!\Gamma(k+1)}{}_1F_1(-n;k+1;x) \quad (٨،٢٩)$$

سادساً: العلاقة بين الدالة فوق الهندسية و دالة هيرمايت هي:

$$H_{2n}(x)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}{}_1F_1(-n;\tfrac{1}{2};x^2),$$

$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n x\frac{2(2n+1)!}{n!}{}_1F_1(-n;\tfrac{3}{2};x^2) \quad (٨،٣٠)$$

(٨,٤) "المعادلة التفاضلية لدالة جاوس والعلاقات المشابهة"

ذكرنا فيما سبق أن الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

هو :

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$$

وقد أثبت أرديلي (Erdelyi) أن الدوال فوق الهندسية الآتية :

$${}_2F_1(\alpha\pm1,\beta;\gamma;x),\ \ {}_2F_1(\alpha,\beta\pm1;\gamma;x),\ \ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma\pm1;x)$$

مرافقة للدالة ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ بمعنى أن بين كل دالتين سبق ذكرهما ودالة جاوس علاقة خطية في معاملات x ، كما أثبت أرديلي صحة العلاقات التالية :

$$(1)\quad {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x)$$

$$=(1-x)^{-\alpha}\,{}_2F_1(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{x}{x-1})$$

$$=(1-x)^{-\beta}\,{}_2F_1(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{x-1})$$

$$(2)\quad x^{1-\gamma}\,{}_2F_1(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma;\alpha+\beta+1-\gamma;1-x)$$

$$=x^{-\alpha}\,{}_2F_1(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma;1-\frac{1}{x})$$

$$=x^{-\beta}\,{}_2F_1(\beta+1-\gamma,\beta;\alpha+\beta+1-\gamma;1-\frac{1}{x})$$

$$=(-x)^{-\alpha}\,{}_2F_1(\alpha,\alpha+1-\gamma;\alpha+1-\beta;\frac{1}{x})$$

(3) $(-x)^{-\alpha}{}_2F_1(\alpha,\alpha+1-\gamma;\alpha+1-\beta;\frac{1}{x})$

$=(-x)^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(1-\beta,\gamma-\beta,\alpha+1-\beta;\frac{1}{x})$

$=(1-x)^{-\alpha}{}_2F_1(\alpha,\gamma-\beta;\alpha+1-\beta;\frac{1}{1-x})$

$=(-x)^{1-\alpha}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}{}_2F_1(\alpha+1-\gamma,1-\beta;\alpha+1-\beta;\frac{1}{1-x})$

(4) $(-x)^{-\beta}{}_2F_1(\beta+1-\gamma,\beta;\beta+1-\alpha;\frac{1}{x})$

$=(-x)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(1-\alpha,\gamma-\alpha,\beta+1-\alpha;\frac{1}{x})$

$=(1-x)^{-\beta}{}_2F_1(\beta,\gamma-\alpha;\beta+1-\alpha;\frac{1}{1-x})$

$=(-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}{}_2F_1(\beta+1-\gamma,1-\alpha;\beta+1-\alpha;\frac{1}{1-x})$

(5) $x^{1-\gamma}{}_2F_1(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma;2-\gamma;x)$

$=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma;x)$

$=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}{}_2F_1(\alpha+1-\gamma,1-\beta;2-\gamma;\frac{x}{x-1})$

$=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}{}_2F_1(\beta+1-\gamma,1-\alpha;2-\gamma;\frac{x}{x-1})$

(6) $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma+1-\alpha-\beta;1-x)$

$=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(1-\alpha,1-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta;1-x)$

$=x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(\gamma-\alpha,1-\alpha;\gamma+1-\alpha-\beta;1-\frac{1}{x})$

$=x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(\gamma-\beta,1-\beta;\gamma+1-\alpha-\beta;1-\frac{1}{x})$

هذا ويمكن للقارئ أن يثبت أن الدالة فوق الهندسية ${}_1F_1(\alpha;\beta;x)$ والتي تكتب على الشكل الآتي :

$$ {}_1F_1(\alpha;\beta;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r x^r}{(\beta)_r r!} \tag{٨،٣١} $$

تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية :

$$ x^2y''(x)+(\beta-x)y'(x)-\alpha y(x)=0 \tag{٨،٣٢} $$

لاحظ أنه يمكن كتابة (٨،٣١) على الشكل التكاملي :

$$ {}_1F_1(\alpha;\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\gamma-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{xt}dt \qquad \gamma>\alpha>0 \tag{٨،٣٣} $$

والذي يمكن إثباته كالآتي :

$$ \begin{aligned} {}_1F_1(\alpha;\gamma;x)&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r x^r}{(\gamma)_r r!}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+r)}\cdot\frac{x^r}{r!} \\ &=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+r)}\cdot\frac{x^r}{r!} \end{aligned} $$

باستخدام علاقة دالة بيتا بالدالة جاما نحصل على :

$$ {}_1F_1(\alpha;\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{r=0}^{\infty}\beta(\alpha+r,\gamma-\alpha)\frac{x^r}{r!} $$

باستخدام تمثيل بيتا بالتكامل :

$$ \begin{aligned} {}_1F_1(\alpha;\gamma;x)&=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{r=0}^{\infty}\int_0^1 t^{\alpha+r-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\frac{x^r}{r!}dt \\ &=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(xt)^r}{r!}dt \\ &=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{xt}dt \end{aligned} $$

وفيما يلي بعض الأمثلة :

مثال(١) أثبت أن :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma+\alpha;1)=\frac{\Gamma(\gamma+\alpha)\Gamma(\gamma-\upsilon)}{\Gamma(\gamma+\alpha-\upsilon)\Gamma(\gamma)} \quad (٨,٣٤) $$

الإثبات باستخدام الصيغة التكاملية (٨,٨) مع وضع $x=1$ نجد أن :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma+\alpha;1)=\frac{\Gamma(\gamma+\alpha)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma+\alpha-\upsilon)}\int_0^1 t^{\upsilon-1}(1-t)^{\gamma+\alpha-\upsilon-1}(1-t)^{-\alpha}dt $$

$$ =\frac{\Gamma(\gamma+\alpha)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma+\alpha-\upsilon)}\beta(\upsilon,\gamma-\upsilon) $$

$$ =\frac{\Gamma(\gamma+\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+\alpha-\upsilon)}\frac{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}{\Gamma(\gamma)}=\frac{\Gamma(\gamma+\alpha)\Gamma(\gamma-\upsilon)}{\Gamma(\gamma+\alpha-\upsilon)\cdot\Gamma(\gamma)} $$

مثال(٢) أثبت أن :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;\gamma)=(1-x)^{-\alpha}\,{}_2F_1(\alpha,\gamma-\upsilon;\gamma;\frac{x}{x-1}) \quad (٨,٣٥) $$

الإثبات باستخدام العلاقة :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\int_0^1 t^{\upsilon-1}(1-t)^{\gamma-\upsilon-1}(1-xt)^{-\alpha}dt $$

وبوضع $t=1-\tau$ نلاحظ الآتي :

$$ {}_2F_1(\alpha,\upsilon;\gamma;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\gamma-\upsilon)}\int_0^1(1-\tau)^{\upsilon-1}\tau^{\gamma-\upsilon-1}(1-x)^{-\alpha}(1-\frac{x\tau}{x-1})^{-\alpha}d\tau $$

$$ =\frac{\Gamma(\gamma)\cdot(1-x)^{-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\upsilon)\Gamma\{\gamma-(\gamma-\upsilon)\}}\int_0^1\tau^{\gamma-\upsilon-1}(1-\tau)^{\upsilon-1}(1-\frac{x\tau}{x-1})^{-\alpha}d\tau $$

$$ =(1-x)^{-\alpha}\,{}_2F_1(\alpha,\gamma-\upsilon;\gamma;\frac{x}{x-1}) $$

مثال(٣) أثبت أن :

$$ {}_1F_1(\alpha;\upsilon;x) = e^x\, {}_1F_1(\upsilon-\alpha;\upsilon;-x) \quad (٨،٣٦) $$

الإثبات باستخدام العلاقة (٨،٣٣)

$$ {}_1F_1(\alpha;\upsilon;x) = \frac{\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\upsilon-\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\upsilon-\alpha-1} t^{\alpha-1} e^{xt}\,dt $$

وباستخدام التعويض $\tau = 1-t$ ، $d\tau = -dt$ نحصل على الآتي :

$$ {}_1F_1(\alpha;\upsilon;x) = \frac{\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\upsilon-\alpha)}\int_0^1 \tau^{\upsilon-\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1} e^{x(1-\tau)}\,d\tau $$

$$ = e^x \frac{\Gamma(\upsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\upsilon-\alpha)}\int_0^1 \tau^{\upsilon-\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1} e^{-x\tau}\,d\tau $$

وباستخدام التعريف التكاملي نفسه نحصل على الآتي :

$$ {}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = e^x\, {}_1F_1(\gamma-\alpha;\alpha;-x) $$

مثال(٤) أثبت أن

$$ \begin{aligned} &\gamma\{\gamma-1-(2\gamma-1-\alpha-\beta)x\}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) \\ &+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+1;x)-\gamma(\gamma-1)(1-x)\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;x)=0 \end{aligned} \quad (٨،٣٧) $$

الإثبات باستخدام التعريف

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum \frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r\, r!} x^r $$

نجد أن :

$$ \text{الطرف الأيسر} = \gamma(\gamma-1)\sum_{r=0} \frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{(\gamma)_r\, r!} x^r - \gamma(2\gamma-1-\alpha-\beta)\sum_{r=0} \frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{(\gamma)_r\, r!} x^{r+1} $$

$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\sum\frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{(\gamma)_r\,r!}x^{r+1}-\gamma(\gamma-1)\sum\frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{(\gamma)_r\,r!}x^{r}$$
$$+\gamma(\gamma-1)\sum\frac{(\alpha)_r\,(\beta)_r}{(\gamma)_r\,r!}x^{r+1}$$

بأخذ معامل x^n نحصل على:

$$\text{الطرف الأيسر}=\gamma(\gamma-1)\frac{(\alpha)_n\,(\beta)_n}{(\gamma)_n\,n!}-\gamma(2\gamma-1-\alpha-\beta)\frac{(\alpha)_{n-1}\,(\beta)_{n-1}}{(\gamma)_{n-1}\,(n-1)!}$$
$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\frac{(\alpha)_{n-1}\,(\beta)_{n-1}}{(\gamma+1)_{n-1}\,(n-1)!}-\gamma(\gamma-1)\frac{(\alpha)_n\,(\beta)_n}{(\gamma-1)_n\,n!}$$
$$+\gamma(\gamma-1)\frac{(\alpha)_{n-1}\,(\beta)_{n-1}}{(\gamma-1)_{n-1}\,(n-1)!}$$

بكتابة العلاقات بدلالة دالة جاما نجد أن:

$$\text{الطرف الأيسر}=\gamma(\gamma-1)\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)\cdot n!}-$$
$$-\gamma(2\gamma-1-\alpha-\beta)\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-1)\cdot(n-1)!}+$$
$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)\cdot(n-1)!}-$$
$$-\gamma(\gamma-1)\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-1)\cdot n!}+$$
$$+\gamma(\gamma-1)\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-2)\cdot(n-1)!}$$

بالاختصار نحصل على:

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-2)\cdot(n-1)!}\left\{\frac{\gamma(\gamma-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)\gamma}{n(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)}\right.$$

$$-\frac{\gamma(2\gamma-1-\alpha-\beta)(\gamma-1)}{(\gamma+n-2)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)}$$
$$\left.-\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma+n-1)(\beta+n-1)}{(\gamma+n-2)n}+\gamma(\gamma-1)\right\}$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-2)\cdot(n-1)!}\cdot\frac{\gamma(\gamma-1)}{n(n+\gamma-1)(\gamma+n-2)}\cdot$$
$$\{\gamma(\alpha+n-1)(\beta+n-1)-n(\gamma+n-1)(2\gamma-1-\alpha-\beta)+n(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$
$$-(\gamma+n-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)+n(\gamma+n-1)(\gamma+n-2)\}$$

وبالاختصار يمكن التوصل إلى:

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\gamma-1)\cdot\gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n-2)\cdot(n-1)!n(n+\gamma-1)(\gamma+n-2)}\cdot$$
$$\cdot\Big[\ \gamma^2(-2n+n+n)+\gamma\{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)+n(\alpha+\beta+1)\}$$
$$-2(n-1)n-n\alpha-n\beta-(\alpha+n-1)(\beta+n-1)$$
$$+n(n-2)+n(n-1)\}+n(n-1)(\alpha+\beta+1)+n\alpha\beta$$
$$-(n-1)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)+n(n-1)(n-2)\Big]=0$$

مثال(٥) أثبت أن

$$C_n^m(x)=\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(n+2m)}{\Gamma(2m)\Gamma(n+m+\frac{1}{2})}P_n^{(m-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2})}(x)\quad (٨.٣٨)$$

الإثبات باستخدام العلاقة

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}{}_2F_1(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2})$$

مع وضع $\alpha=m-\frac{1}{2},\ \beta=m-\frac{1}{2}$ نجد أن

$$P_n^{(m-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2})}(x)=\frac{\Gamma(n+m-\frac{1}{2}+1)}{n!\Gamma(m-\frac{1}{2}+1)}{}_2F_1(-n,n+m-\tfrac{1}{2}+m-\tfrac{1}{2}+1;m-\tfrac{1}{2}+1;\frac{1-x}{2})$$
$$=\frac{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})}{n!\Gamma(m+\frac{1}{2})}{}_2F_1(-n,n+2m;m+\tfrac{1}{2};\frac{1-x}{2})$$

باستخدام العلاقة :

$$C_n^m(x)=\frac{\Gamma(n+2m)}{n!\Gamma(2m)}{}_2F_1(-n,n+2m;m+\tfrac{1}{2};\frac{1-x}{2}) \quad (٨.٣٩)$$

نحصل على الآتي :

$$P_n^{(m-\frac{1}{2},m-\frac{1}{2})}(x)=\frac{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})}{n!\Gamma(m+\frac{1}{2})}\frac{n!\Gamma(2m)}{\Gamma(n+2m)}C_n^m(x)$$
$$=\frac{\Gamma(2m)\Gamma(n+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(n+2m)}C_n^m(x)$$

مثال(٦) أثبت أن

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\lim_{m\to 0}\frac{C_n^m(x)}{m} \quad (٨.٤٠)$$

الإثبات

$$\frac{n}{2}\lim_{m\to 0}\frac{C_n^m(x)}{m}=\frac{n}{2}\lim_{m\to 0}\frac{1}{m\Gamma(2m)}\cdot\lim_{m\to 0}\frac{\Gamma(n+2m)}{n!}\;{}_2F_1(-n,n+2m;m+\tfrac{1}{2};\frac{1-x}{2})$$
$$=\frac{n}{2}\lim_{m\to 0}\frac{1}{m\Gamma(2m)}\frac{\Gamma(n)}{n!}\;{}_2F_1(-n,n;\tfrac{1}{2};\frac{1-x}{2})$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{m\to 0}\frac{1}{m\Gamma(2m)}\;{}_2F_1(-n,n;\tfrac{1}{2};\frac{1-x}{2})$$

وباستخدام العلاقة $\Gamma(n+1)=n!$, $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$ ، نحصل على :

$$\frac{n}{2}\lim_{m\to 0}\frac{C_n^m(x)}{m}=\left(\lim_{m\to 0}\frac{1}{m\Gamma(2m)}\right)\cdot {}_2F_1(-n,n;\tfrac{1}{2};\frac{1-x}{2})$$

$$=\lim_{m\to 0}\frac{1}{\Gamma(2m+1)}\cdot\ {}_2F_1(-n,n;\tfrac{1}{2};\frac{1-x}{2})$$

$$={}_2F_1(-n,n;\tfrac{1}{2};\frac{1-x}{2})=T_n(x)$$

مثال(٧) أثبت أن

$$U_n(x)=\sqrt{1-x^2}\,C_{n-1}^1(x) \qquad (٨,٤١)$$

الإثبات باستخدام العلاقة (٨,٣٨) مع وضع $m=1, n=n-1$ نحصل على:

$$C_{n-1}^1(x)=\frac{\Gamma(n-1+2)}{(n-1)!\Gamma(2)}\ {}_2F_1(-n+1,n-1+2;1+\tfrac{1}{2};\frac{1-x}{2})$$

$$=\frac{n\Gamma(n+1)}{n!\Gamma(2)}\ {}_2F_1(-n+1,n+1;\tfrac{3}{2};\frac{1-x}{2})$$

$$=n\ {}_2F_1(-n+1,n+1;\tfrac{3}{2};\frac{1-x}{2})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x)\cdot$$

تمــارين

١. أثبت صحة الآتي:

(أ) $(1-x)^{-\alpha}={}_2F_1(\alpha,\beta;\beta;x)$ ، (ب) $\ln(1-x)=-x\cdot{}_2F_1(1,1;2;x)$

(ج) $e^x={}_1F_1(\alpha;\alpha;x)$ ، (د) ${}_1F_1(\alpha;\gamma;x)=\lim_{\beta\to\infty}\ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x/\beta)$

٢. أثبت صحة العلاقات التالية:

(أ) $${}_2F_1(\alpha,\beta;\beta-\alpha+1;-1)=\frac{\Gamma(1+\beta-\alpha)\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+\frac{1}{2}\beta-\alpha)}$$

(ب) $$\frac{d^n}{dx^n}\, {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\, {}_2F_1(\alpha+n,\beta+n;\gamma+n;x)$$

٣. أثبت صحة الآتي:

(أ) $${}_2F_1(\alpha,1-\alpha;\gamma;\tfrac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\gamma)\Gamma(\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\gamma)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\gamma)}$$

(ب) $$(\alpha-\beta)\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=\alpha\ {}_2F_1(\alpha+1,\beta;\gamma;x)-\beta\ {}_2F_1(\alpha,\beta+1;\gamma;x)$$

(ج) $$(\alpha-\beta)x\ {}_1F_1(\alpha;\beta+1;x)+\beta(x+\beta-1)\,{}_1F_1(\alpha;\beta;x)-\beta(\beta-1)\,{}_1F_1(\alpha;\beta-1;x)=0$$

٤. باستخدام الدالة فوق الهندسية أثبت الآتي:

(أ) $J_{\frac{-1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ ، (ب) $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$

حيث $J_n(x)$ تمثل كثيرات حدود بسل.

٥. أثبت أن C_{n-1}^{1} تمثل حلاً للمعادلة $(1-x^2)y''-3xy'+(n^2-1)y=0$

إرشاد: استخدم التعويض $y=\dfrac{U_n}{\sqrt{1-x^2}}$

حيث C_n^m , U_n كثيرات حدود هيجنبير وتشبشف من النوع الثاني على الترتيب.

الفصل التاسع

كثيرات حدود جيجنباور وجاكوبي
Gegenbauer and Jacobi Polynomials

يضم هذا الفصل بندين ندرس فيهما كثيرات حدود جيجنباور وجاكوبي والعلاقات التكرارية لكل منهما.

(٩,١) "كثيرات حدود جيجنباور Gegenbauer Polynomials"

كثيرات حدود جيجنباور أو كثيرات الحدود فوق الكروية (Ultraspherical Polynomials) $C_n^\ell(x)$، هي صنف من كثيرات الحدود المتعامدة تمثل حلاً لمعادلة جيجنباور التفاضلية ، سُميت بهذا الاسم نسبة إلى الألماني لبولد جيجنباور (١٨٤٩- ١٩٠٣)، ويمكن الحصول عليها من المتسلسلات فوق الهندسية المنتهية ، وتعرف كالآتي:

كثيرة حدود جيجنباور من الدرجة n والرتبة ℓ والتي يرمز لها بالرمز $C_n^\ell(x)$ هي معامل t^n في متسلسلة : $\dfrac{1}{(1-2xt+t^2)^\ell}$

وعندما $t=\frac{1}{2}$ نجد أن $C_n^{\frac{1}{2}}(x)=P_n(x)$ وهي كثيرة حدود لجندر، ونلحظ أن

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\ell}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\ell}(x)t^n \text{ ، } |t|<1 \text{ ، } |x|\le 1 \text{ ، } \ell>-\frac{1}{2} \tag{٩,١}$$

وعليه فإن $C_0^{\ell}(x)=1$ ، $C_1^{\ell}(x)=2\ell x$ ، $C_2^{\ell}(x)=-\ell+2\ell(1+\ell)x^2$ ،

$$C_3^{\ell}(x)=-2\ell(1+\ell)x+\frac{4}{3}\ell(1+\ell)(2+\ell)x^3$$

ولكثيرات حدود جيجنباور الخواص الآتية :

(١) يمكن التعبير عن كثيرات حدود جيجنباور كالآتي :

$$C_n^l(x)=\sum_{r=0}^{[\frac{1}{2}n]}(-1)^r\frac{\Gamma(n-r+l)}{\Gamma(l)r!(n-2r)!}(2x)^{n-2r} \tag{٩,٢}$$

حيث $\Gamma(x)$ هي دالة جاما.

(٢) كثيرات حدود جيجنباور تحقق المعادلة التفاضلية :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-(1+2l)x\frac{dy}{dx}+n(n+2l)y=0 \tag{٩,٣}$$

(٣) **"خاصية التعامد"**: كثيرات حدود جيجنباور تحقق العلاقة الآتية :

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{l-\frac{1}{2}}C_n^l(x)C_m^l(x)\,dx=2^{1-2l}\frac{\pi\Gamma(n+2l)}{(n+l)\{\Gamma(l)\}^2\Gamma(n+1)}\delta_{nm} \tag{٩,٤}$$

وعندما $l=\frac{1}{2}$ ، فإننا نجد أن :

$$\int_{-1}^{1}C_n^{\frac{1}{2}}(x)C_m^{\frac{1}{2}}(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{٩,٥}$$

وهي العلاقة نفسها التي حصلنا عليها في خاصية التعامد لدالة لجندر.

وفيما يلي العلاقات التكرارية لكثيرات حدود جيجنباور:

$$(1)\ (n+2)C_{n+2}^{l}(x)=2(l+n+1)xC_{n+1}^{l}(x)-(2l+n)C_{n}^{l}(x)$$

$$(2)\ nC_{n}^{l}(x)=2l\{xC_{n-1}^{l+1}(x)-C_{n-2}^{l+1}(x)\}$$

$$(3)\ (n+2l)C_{n}^{l}(x)=2l\{C_{n}^{l+1}(x)-xC_{n-1}^{l+1}(x)\}$$

$$(4)\ nC_{n}^{l}(x)=(n-1+2l)xC_{n-1}^{l}(x)-2l(1-x^{2})C_{n-2}^{l-1}(x)$$

$$(5)\ C_{n}^{l\prime}(x)=2lC_{n-1}^{l+1}(x), \qquad C_{n}^{l\prime}(x)=\frac{d}{dx}C_{n}^{l}(x)$$

ومن هذه العلاقات يمكن استنتاج العديد من العلاقات الهامة ، فعلى سبيل المثال عند جمع العلاقتين (٣)، (٢) نجد أن :

$$2(n+l)C_{n}^{l}(x)=2l\{C_{n}^{l+1}(x)-C_{n-2}^{l+1}(x)\}$$

أو

$$C_{n}^{l}(x)=\frac{l}{l+n}\{C_{n}^{l+1}(x)-C_{n-2}^{l+1}(x)\} \qquad (٩.٦)$$

أما عند طرح (٢) من (٣) نحصل على :

$$C_{n}^{l}(x)=\{C_{n}^{l+1}(x)-2xC_{n-1}^{l+1}(x)+C_{n-2}^{l+1}(x)\} \qquad (٩.٧)$$

أما بمساواة طرفي المعادلتين (٩.٧) ، (٩.٦) فإننا نجد أن :

$$2(n+l)xC_{n-1}^{l+1}(x)=nC_{n}^{l+1}(x)+(2l+n)C_{n-2}^{l+1}(x) \qquad (٩.٨)$$

أما علاقة كثيرة حدود جيجنباور بالدوال فوق الهندسية فهي:

$$C_{n}^{l}(x)=\frac{\Gamma(n+2l)}{n!\,\Gamma(2l)}\ {}_{2}F_{1}\left(-n,n+2l,l+\frac{1}{2},\frac{1-x}{2}\right) \qquad (٩.٩)$$

والآن إلى المبرهنة الآتية :

مبرهنة(١)

$$\frac{d^{m}}{dx^{m}}C_{n}^{l}(x)=2^{m}\frac{\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)}C_{n-m}^{l+m}(x)$$

الإثبات باستخدام العلاقة :

$$\frac{d}{dx}C_n^l(x) = 2lC_{n-1}^{l+1}(x)$$

نحصل على :

$$\frac{d^2}{dx^2}C_n^l(x) = 2l\frac{d}{dx}C_{n-1}^{l+1}(x) = 2\cdot 2l(l+1)C_{n-2}^{(l+2)}(x) = 2^2 l(l+1)C_{n-2}^{(l+2)}(x)$$

وبتكرار العملية نجد أن

$$\frac{d^m}{dx^m}C_n^l(x) = 2^m l(l+1)\cdots(l+m-1)C_{n-m}^{l+m}(x)$$

وحيث إن :

$$l(l+1)(l+2)\cdots(l+m-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(l-1)l(l+1)\cdots(l+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(l-1)}$$

$$= \frac{(l+m-1)!}{(l-1)!} = \frac{\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)}$$

فعليه نحصل على :

$$\frac{d^m}{dx^m}C_n^l(x) = 2^m\frac{\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)}C_{n-m}^{l+m}(x)$$

(٩,٢) " كثيرات حدود جاكوبي Jacobi Polynomials

ظهرت كثيرات حدود جاكوبي كصنف من كثيرات الحدود المتعامدة التي تعمم كثيرات حدود جيجنباور، ويمكن الحصول عليها من المتسلسلات فوق الهندسية المنتهية والتي تعتبر حلاً لمعادلة جاكوبي التفاضلية، سُميت بهذا الاسم نسبة إلى الرياضي الألماني جاكوبي (١٨٠٤- ١٨٥١)، ويرمز لها بالرمز $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ وتعرف بأنها معامل t^n في مفكوك :

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\{1-t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\alpha}\{1+t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\beta}}$$

وعليه يمكن كتابة العلاقة الآتية :

$$\frac{2^{\alpha+\beta}}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\{1-t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\alpha}\{1+t+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}t^n \quad (٩,١٠)$$

من العلاقة (٩,١٠) عندما $\alpha=\beta=0$ نجد أن :

$$P_n^{(0,0)}(x)=P_n(x) \quad (٩,١١)$$

حيث $P_n(x)$ تمثل دالة لجندر.

ويمكن تعريف كثيرات حدود جاكوبي بدلالة الدوال فوق الهندسية كالآتي :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,1+\alpha+\beta+n,1+\alpha,\frac{1-x}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha+1)}\,{}_2F_1\left(-n,1+\alpha+\beta+n,1+\alpha,\frac{1-x}{2}\right) \quad (٩,١٢)$$

حيث $(\alpha+1)_n$ رمز بوشمر.

ومما سبق يمكن أن نثبت ما يلي.

مبرهنة(٢)

كثيرات حدود جاكوبي [٢] تأخذ الأشكال الآتية :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(n+\beta-r+1)(n-r)!r!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^r\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-r}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+r+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(n-r)!r!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^r$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^{n-r}\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+r+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+r+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(n-r)!r!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^r$$

مبرهنة(٣)

كثيرات حدود جاكوبي $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ تحقق المعادلة التفاضلية :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\}\frac{dy}{dx}+n(n+\alpha+\beta+1)y=0 \quad (٩,١٣)$$

واضح من خلال المعادلة (٩,١٣) أنه يمكن أن نثبت الآتي :

$$C_n^l(x)=\frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})\Gamma(n+2l)}{\Gamma(2l)\Gamma(n+l+\frac{1}{2})}P_n^{(l-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2})}(x) \quad (٩,١٤)$$

$$L_n^\alpha(x)=\underset{\beta\to\infty}{Lim}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(1-\frac{2x}{\beta}) \quad (٩,١٥)$$

$$H_n(x)=n!\underset{l\to\infty}{Lim}\,l^{\frac{-n}{2}}C_n^l\left(x/\sqrt{l}\right) \quad (٩,١٦)$$

مبرهنة(٤) كثيرات حدود جاكوبي تحقق خاصية التعامد الآتية :

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$$
$$=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{nm} \quad (٩,١٧)$$

وفيما يلي بعض علاقات جاكوبي التكرارية :

(1) $2n(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+2n-2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$
$=(\alpha+\beta+2n-1)\{\alpha^2-\beta^2+x(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)\}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$
$-2(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\alpha+\beta+2n)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)$

(2) $P_{n-2}^{(\alpha,\beta)\prime}(x)=\frac{1}{2}(1+\alpha+\beta+n)P_{n-1}^{(1+\alpha,1+\beta)}(x)$

(3) $(1+x)P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x)=nP_n^{(\alpha,\beta)}(x)+(\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x)$

$$(4)\quad (x-1)P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x)=nP_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta+1)}(x)$$

$$(5)\quad P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x)=\frac{1}{2}\{(\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x)+(\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta+1)}(x)\}$$

$$(6)\quad (\alpha+\beta+2n)P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x)=(\alpha+\beta+n)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+(\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$(7)\quad (\alpha+\beta+2n)P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x)=(\alpha+\beta+n)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

حيث $P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x)=\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

وأخيراً المبرهنة الآتية :

مبرهنة(٥)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}$$

البرهان

بدراسة الطرف الأيمن والاهتمام بالمقدار تحت علامة التفاضل ، وذلك بتطبيق مبرهنة ليبنز نجد أن :

$$\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha-n}(1+x)^{\beta+n}\}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}\{\frac{d^r}{dx^r}(1+x)^{\beta+n}\}\{\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}(1-x)^{\alpha+n}\}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-r+1)(1+x)^{\beta+n-r}$$

$$\times(-1)^{n-r}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+n-n+r+1)(1-x)^{\alpha+n-n+r}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}(-1)^{n-r}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\beta+n-r+1)\Gamma(\alpha+r+1)}(1+x)^{\beta+n-r}(1-x)^{\alpha+r}$$

وعليه يكون الطرف الأيمن كالآتي :

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\frac{n!}{r!(n-r)!}\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\beta+n-r+1)\Gamma(\alpha+r+1)}(1+x)^{\beta+n-r}(1-x)^{\alpha+r}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(\beta+n-r+1)r!(n-r)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^r\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-r}=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

تمـــارين

١. أثبت أن :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(1+\alpha)}$$

٢. أثبت أن :

$$\frac{d^m}{dx^m}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=2^{-m}\frac{\Gamma(m+n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}P_{n-m}^{(\alpha+m,\beta+m)}(x)$$

٣. باستخدام الاستقراء الرياضي أثبت أن :

$$\sum_{r=0}^{n}(r+l)C_r^l(x)=\frac{1}{2(1-x)}[(n+2l)C_n^l(x)-(1+n)C_{n+1}^l(x)]\ ,\ |x|<1$$

٤. أثبت أن :

$$P_n^{(\alpha,\beta-1)}(x)-P_n^{(\alpha-1,\beta)}(x)=P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

الفصل العاشر

كثيرات حدود ودوال خاصة أخرى

يضم هذا الفصل سبعة بنود ، ندرس فيها دالة ماثيو والتكاملات الأسية واللوغارتمية ودالة الخطأ وتكاملات فرسنل، دالتي زيتا وديبي والتكاملات الناقصية إضافة إلى دالة ديراك والدوال الكرية التوافقية.

(١٠,١) "دالة ماثيو Mathieu Function"

ظهرت دالة ماثيو سنة ١٨٦٨م في أبحاث الرياضي والفيزيائي الفرنسي أميل ليونارد ماثيو (١٨٣٥- ١٨٩٠)، لدراسة مسائل الأغشية الرقيقة ذات الأشكال الإهليليجية أو الناقصة (Vibrating elliptical drumheads) ، كحل لمعادلة ماثيو التفاضلية.

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(a-2q\cos 2z)y=0 \qquad (\text{ثوابت} \quad a,q\ ) \qquad (١٠.١)$$

وعندما $q=k^2$ فإن q عدد حقيقي ما لم ينص على خلاف ذلك.

ولهذه الدوال تطبيقات أخرى في ظاهرة رنين متذبذب قسري، الحلول الدقيقة للموجات أو الحركات الموجية المستوية في النسبية العامة ، إضافة إلى دراسة التأثيرات القوية الناتجة من دوران جزئي ثنائي الاستقطاب مكهرب.

ومن الملحوظ أن معادلة الجهد $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+k^2 v=0$

بالإحداثيات الإهليليجية (Elliptical coordinates) هي :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2}+a^2k^2 v(\cosh^2\xi-\cos^2\mu)=0$$

ولهذه المعادلة حلول على الشكل $v=x(\xi)\,y(\mu)$ ، إذا كان :

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}+x(a^2k^2\cosh^2\xi-A)=0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{d\mu^2}+y(A-a^2k^2\cos^2\mu)=0$$

وهذه المعادلات حالات خاصة من المعادلة (١٠.١).

لاحظ أن التعويض $t=\cos z$ يحول المعادلة (١٠.١) إلى المعادلة الآتية :

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+\left[a+2q(1-2t^2)\right]y=0 \qquad (١٠.٢)$$

وهي معادلة تملك نقطتين شاذتين منتظمتين عند $t=-1,1$ ونقطة شاذة غير منتظمة عند ما لانهاية ، وعليه لا يمكن بصورة عامة (بل في حالات خاصة) أن يعبر عن حلول معادلة ماثيو التفاضلية بدلالة الدوال فوق الهندسية.

ومن الواضح أن المعادلة (١٠.١) خطية من الرتبة الثانية ، وحلولها تتوقف على قيم الثوابت a,q. فإذا كان $q=0$ تصبح المعادلة (١٠.١) كالآتي :

$$\frac{d^2y}{dz^2}+ay=0 \qquad (١٠.٣)$$

وعندما $a=m^2$ يكون للمعادلة (١٠.٣) حلان مستقلان هما $\sin mz$, $\cos mz$ وهما دوريان في z بدورة 2π عندما m عدد صحيح.

أما إذا كانت $a=0$ فإن الحل هو أي ثابت أو $bz+c$.

وإذا كان $q \neq 0$ ، فإذا لقيم ثابتة لكل من a, q يعرف الحل الزوجي $c(z)$ بالشروط الابتدائية $c(0)=1, \;\; c'(0)=0$ والحل الفردي $s(z)$ بالشروط الابتدائية $s(0)=0, \;\; s'(0)=1$ مع ملاحظة أن الحلين يرتبطان بالعلاقة :

$$c(z)s'(z)-s(z)c'(z)=1$$

- **الحل الدوري للمعادلة (١٠,١)**

إذا كانت الدالة ذات دورة π أو 2π و $q \neq 0$

$$a=m^2+\alpha_1 q+\alpha_2 q^2+\alpha_3 q^3+\cdots \qquad (١٠.٤)$$

وتكون الحلول على الشكل $\pm\sin mz, \;\; \pm\cos mz$ ويمكن أخذ الإشارة الموجبة عندما تتطلب المسألة ذلك.

١- الحل الدوري من النوع الأول

لإيجاد الحل الدوري الجزئي للمعادلة (١٠.١)، يوجد خياران هما :

(أ) عندما $q=0$ نفرض $a=m^2=1$

(ب) عندما $q>0$ أو $q<0$ نفرض :

$$a=1+\alpha_1 q+\alpha_2 q^2+\alpha_3 q^3+\cdots \qquad (١٠.٥)$$

وعليه يكون الحل على الصورة :

$$y=\cos z+c_1(z)q+c_2(z)q^2+c_3(z)q^3+\cdots \qquad (١٠.٦)$$

حيث إن $c_1, c_2, \cdots$ دوال في المتغير z

ولإيجاد حل المعادلة (١٠.٣) ، لاحظ أن :

$$y''=-\cos z+c_1''(z)q+c_2''(z)q^2+c_3''(z)q^3+\cdots,$$

$$ay=\cos z+q(c_1+\alpha_1\cos z)+q^2(c_2+\alpha_1 c_1+\alpha_2\cos z)+$$
$$+q^3(c_3+\alpha_1 c_2+\alpha_2 c_1+\alpha_3\cos z)+\cdots,-(2q\cos 2z)y$$

$$= -q(\cos z + \cos 3z) - 2q^2 c_1 \cos 2z - 2q^3 c_2 \cos z - \cdots \quad (١٠.٧)$$

وبالتعويض عن هذه الحسابات في المعادلة (١٠.١) ثم مطابقة قوى q بالصفر نجدأن :

$$\text{معامل } q^0 = \cos z - \cos z = 0 \quad (١٠.٨)$$

$$\text{معامل } q = c_1'' + c_1 - \cos 3z + (\alpha_1 - 1)\cos z = 0 \quad (١٠.٩)$$

وحيث إن التكامل الجزئي المقترن بالدالة $(\alpha_1 - 1)\cos z$ ليس دورياً للدالة $\frac{1}{2}(1-\alpha_1)z\sin z$ وحيث أنه من المفروض أن y دالة دورية إذاً يجب أن ينعدم الجزء $(\alpha_1 - 1)\cos z$ ولذلك من المعادلة (١٠.٩) نحصل على :

$$\alpha_1 = 1 \ , \ c_1'' + c_1 = \cos 3z \quad (١٠.١٠)$$

وحيث إن الحل الجزئي للمعادلة $v'' + v = A\cos mz$ هو $(m \neq 1)$، $-A\cos mz/(m^2 - 1)$ إذاً عند وضع $m = 3, A = 1$ نجد أن :

$$c_1 = -\frac{1}{8}\cos 3z \quad (١٠.١١)$$

ويكون الحل الخاص أو المكمل للمعادلة (١٠.١٠) هو الدالة (١٠.١١) مضروباً في $q\sin z$ أو $q\cos z$. وحيث إن لجميع قيم q يكون معامل $\cos z$ يساوي واحد وإن $\sin z$ فردية إذاً يتم حذف الحل المكمل للمعادلة (١٠.١٠). وحيث إن

$$\text{معامل } q^2 = c_2'' + c_2 + \alpha_1 c_1 - 2c_1 \cos 2z + \alpha_2 \cos z = 0 \quad (١٠.١٢)$$

إذاً بالتعويض عن قيم α_1 من المعادلة (١٠.١٠)، c_1 من (١٠.١١) في (١٠.١٢) نحصل على الآتي :

$$c_2'' + c_2 - \frac{1}{8}\cos 3z + \frac{1}{8}\cos 5z + (\frac{1}{8} + \alpha_2)\cos z = 0 \quad (١٠.١٣)$$

وبما أن الحل التكاملي الجزئي $(\frac{1}{8} + \alpha_2)\cos z$ ليس دورياً إذاً $\alpha_2 = -\frac{1}{8}$

وعليه فإن:

$$c_2'' + c_2 = \frac{1}{8}\cos 3z - \frac{1}{8}\cos 5z \qquad (١٠.١٤)$$

وعليه كما سبق يكون الحل الجزئي هو:

$$c_2 = -\frac{1}{64}\cos 3z + \frac{1}{192}\cos 5z \qquad (١٠.١٥)$$

وبالاستمرار في مقارنة المعاملات نحصل على الآتي:

$$\alpha_3 = -\frac{1}{64}\,, \quad c_3 = -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{3}\cos 3z - \frac{4}{9}\cos 5z + \frac{1}{18}\cos 7z\right) \qquad (١٠.١٦)$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{1536}$$
$$c_4 = \frac{1}{4096}\left(\frac{11}{9}\cos 3z + \frac{1}{6}\cos 5z - \frac{1}{12}\cos 7z + \frac{1}{180}\cos 9z\right) \qquad (١٠.١٧)$$

وهكذا...

وبالتعويض عن قيم $c_1, c_2, c_3, \cdots$ في (١٠.٦) نحصل على حل معادلة ماثيو الدورية في z والتي دورتها 2π والذي يعرف بالعلاقة:

$$ce_1(z,q) = \cos z - \frac{1}{8}q\cos 3z + \frac{1}{64}q^2\left(-\cos 3z + \frac{1}{3}\cos 5z\right)$$
$$-\frac{1}{512}q^2\left(\frac{1}{3}\cos 3z - \frac{4}{9}\cos 5z + \frac{1}{18}\cos 7z\right) +$$
$$+\frac{1}{4096}\left(\frac{11}{9}\cos 3z + \frac{1}{6}\cos 5z - \frac{1}{12}\cos 7z + \frac{1}{180}\cos 9z\right) + o(q^5) \qquad (١٠.١٨)$$

ولحساب قيمة a بالتعويض عن α في المعادلة (١٠.٥) نحصل على:

$$a = 1 + q - \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{64}q^3 - \frac{1}{1536}q^4 + \frac{11}{36864}q^5 + o(q^6) \qquad (١٠.١٩)$$

وقيم a من المعادلة (١٠.١٩) تسمى القيم المميزة للدالة $ce_1(z,q)$.

٢- الحل الدوري الآخر من النوع الأول

عندما $m^2 = 1$ يؤول حل المعادلة العامة لماثيو عندما $q = 0$ ، إلى الوضع $\sin z$ فإذا فرضنا أن الحل العام هو

$$y = \sin z + s_1(z)q + s_2(z)q^2 + s_3(z)q^3 + \cdots \quad (١٠,٢٠)$$

$$se_1(z,q) = \sin z - \frac{1}{3}q\sin 3z + \frac{1}{64}q^2(-\sin 3z + \frac{1}{3}\sin 5z)$$

$$-\frac{1}{512}q^2(\frac{1}{3}\sin 3z - \frac{4}{9}\sin 5z + \frac{1}{18}\sin 7z) +$$

$$+\frac{1}{4096}q^4(\frac{-11}{9}\sin 3z + \frac{1}{6}\sin 5z + \frac{1}{12}\sin 7z + \frac{1}{180}\sin 9z) + o(q^5) \quad (١٠,٢١)$$

حيث

$$a = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 - \frac{1}{1536}q^4 - \frac{11}{36864}q^5 + o(q^6) \quad (١٠,٢٢)$$

تمثل الجذور المميزة للدالة $se_1(z,q)$ ذات الدالة الدورية z والتي دورتها 2π ومن الملحوظ أنه عندما $q = 0$ نرى أن $se_1(z,q) = -se_1(-z,q)$

ويمكن كتابة دالة ماثيو في الحالة العامة كالآتي :

$$ce_{2n}(z,q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos 2rz, \qquad A_{2n}^{(2n)} = 1 \quad (١٠,٢٣)$$

$$ce_{2n+1}(z,q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos(2r+1)z, \qquad A_{2n+1}^{(2n+1)} = 1 \quad (١٠,٢٤)$$

$$se_{2n+1}(z,q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin(2r+1)z, \qquad B_{2n+1}^{(2n+1)} = 1 \quad (١٠,٢٥)$$

$$se_{2n+2}(z,q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sin(2r+2)z, \qquad B_{2n+2}^{(2n+2)} = 1 \quad (١٠,٢٦)$$

حيث $A_{2r}^{(2n)}$ ، $A_{2r+1}^{(2n+1)}$ ، $B_{2r+1}^{(2n+1)}$ ، $B_{2r+2}^{(2n+2)}$ دوال في q.

٣- علاقات التعامد لدوال ماثيو الدورية

إذا فرضنا أن y_2, y_1 حلان للمعادلة :

$$y'' + (a - 2q\cos 2z)y = 0 \qquad (١٠.٢٧)$$

فإن

$$y_1'' + (a_1 - 2q\cos 2z)y_1 = 0,$$

$$y_2'' + (a_2 - 2q\cos 2z)y_2 = 0 \qquad (١٠.٢٨)$$

بضرب المعادلة الأولى في y_2 والثانية في y_1 ثم الطرح نحصل على :

$$y_1''y_2 - y_2''y_1 = (a_2 - a_1)y_1y_2 \qquad (١٠.٢٩)$$

بتكامل طرفي المعادلة (١٠.٢٩) على $[z_1, z_2]$ نحصل على

$$\int_{z_1}^{z_2} y_2 dy_1' - \int_{z_1}^{z_2} y_1 dy_2' = (a_2 - a_1)\int_{z_1}^{z_2} y_1y_2 dz \qquad (١٠.٣٠)$$

وعليه نحصل على :

$$\left[y_1'y_2 - y_2'y_1\right]_{z_1}^{z_2} = (a_2 - a_1)\int_{z_1}^{z_2} y_1y_2 dz \qquad (١٠.٣١)$$

ولقيم q المعطاة إلى a والمقترنة بالحلين $y_2 = ce_p(z,q), y_1 = ce_m(z,q)$ حيث $m \neq p$. ولكون y_1 , y_2 دوال دورية دورتها 2π (انظر [٢٠]) يجب أن يكون $z_2 = 2\pi, z_1 = 0$ ، وعليه فإن الطرف الأيسر في المعادلة (١٠.٣١) ينعدم ونحصل على :

$$\int_0^{2\pi} ce_m(z,q)\, ce_p(z,q) dz = 0 \qquad m \neq p \qquad (١٠.٣٢)$$

وعندما $m = p = 2n$ نجد أن :

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(z,q) dz = \int_0^{2\pi}\sum_{r=0}^{\infty}[A_{2r}^{(2n)}\cos 2rz]^2 dz = \sum_{r=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} A_{2r}^{(2n)}\cos^2 2rz dz$$

ومن ثم نحصل على علاقات التعامد لدالة ماثيو وهي :

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(z,q)dz = 2\pi[A_0^{(2n)}]^2 + \pi\sum_{r=1}^{\infty}[A_{2r}^{(2n)}]^2 \quad (١٠،٣٣)$$

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(z,q)dz = \pi\sum_{r=0}^{\infty}[A_{2r}^{(2n)}]^2 \quad (١٠،٣٤)$$

$$\int_0^{2\pi} se_m(z,q)se_p(z,q)dz = 0 \qquad m \neq p \quad (١٠،٣٥)$$

$$\int_0^{2\pi} se_{2n+1}^2(z,q)dz = \pi\sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+1}^{(2n+1)}]^2 \quad (١٠،٣٦)$$

$$\int_0^{2\pi} ce_m(z,q)se_p(z,q)dz = 0 \qquad m, p \text{ أعداد موجبة} \quad (١٠،٣٧)$$

$$\int_0^{2\pi} se_{2n+2}^2(z,q)dz = \pi\sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+2}^{(2n+2)}]^2 \quad (١٠،٣٨)$$

٤- دالة ماثيو المعدلة Modified Mathieu Function

عند التعويض عن z بـ iz في (١٠،١) نحصل على المعادلة :

$$\frac{d^2y}{dz^2} - [a - 2q\cosh(2z)]y = 0 \quad (١٠،٣٩)$$

والتي تسمى معادلة ماثيو المعدلة. وعند وضع iz بدلاً من z في (١٠،٢٣) فإننا نحصل على الحل بالعلاقات التالية :

$$ce_{2n}(z,q) = ce_{2n}(iz,q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}\cosh 2rz \quad (١٠،٤٠)$$

$$ce_{2n+1}(z,q) = ce_{2n+1}(iz,q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}\cosh(2r+1)z$$

$$se_{2n+1}(z,q) = -ise_{2n+1}(iz,q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}\sinh(2r+1)z$$

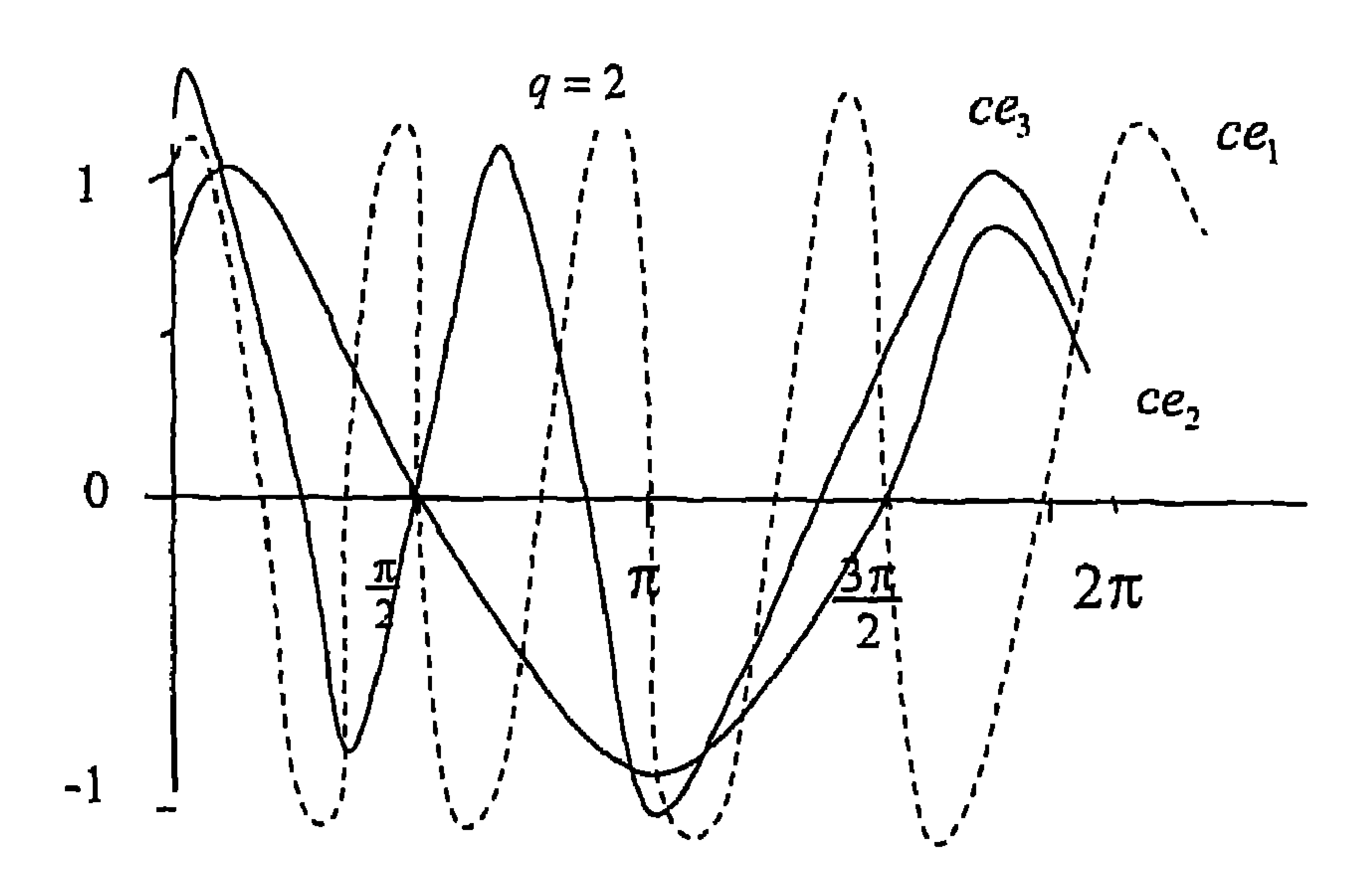
$$se_{2n+2}(z,q) = -ise_{2n+2}(iz,q) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \sinh(2r+2)z \quad (١٠,٤١)$$

$$ce_{2n+1}(z,-q) = ce_{2n+1}(iz,-q) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} \cosh 2rz,$$

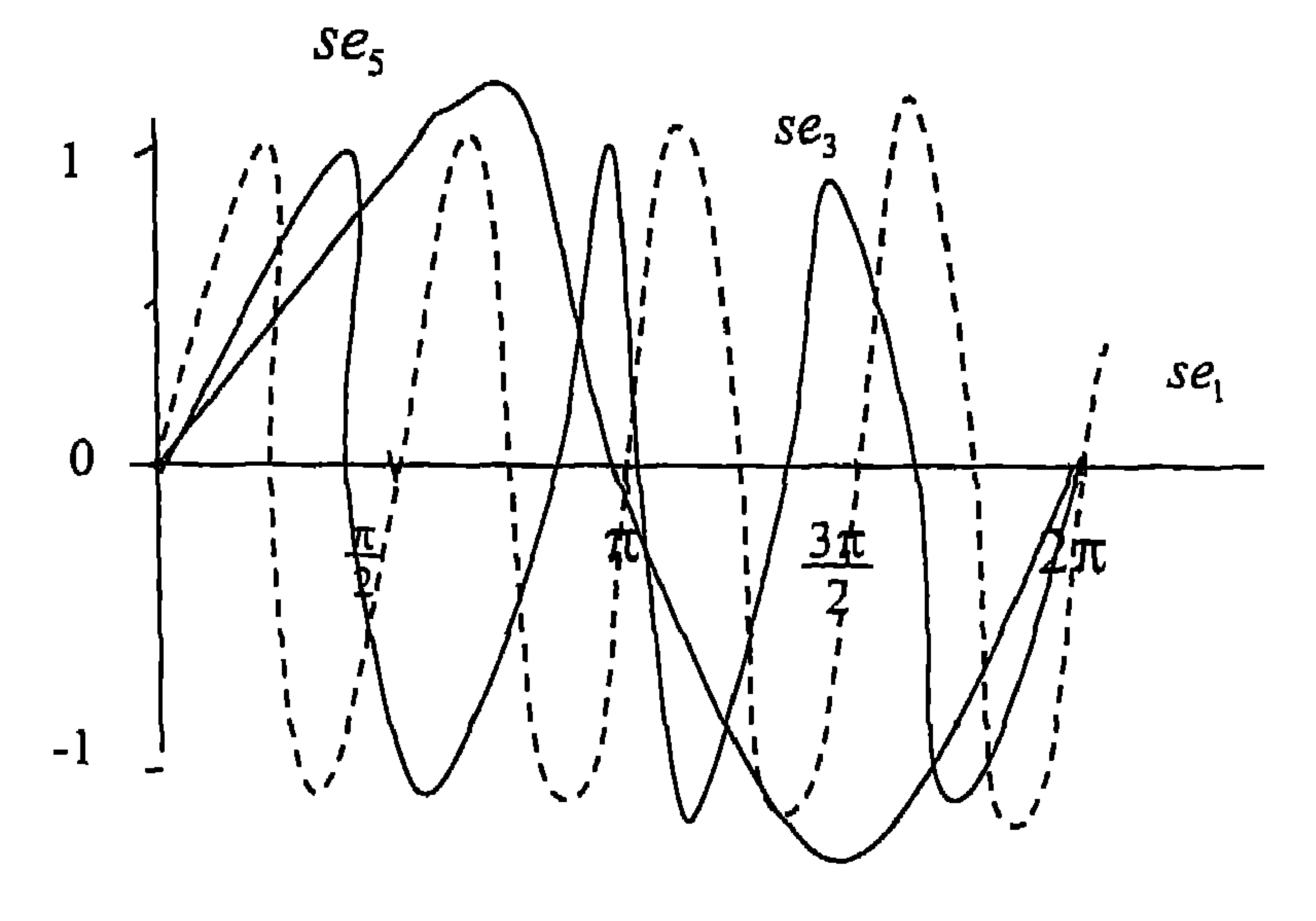
$$ce_{2n+1}(z,-q) = ce_{2n+1}(iz,-q) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} \cosh(2r+1)z$$

$$se_{2n+1}(z,-q) = -ise_{2n+1}(iz,-q) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} \sinh(2r+1)z$$

$$se_{2n+2}(z,-q) = -ise_{2n+2}(iz,-q) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} \sinh(2r+2)z \quad (١٠,٤٢)$$



الشكل رقم (١). منحنى يوضح $ce_1(z,2)$، $ce_2(z,2)$، $ce_3(z,2)$.



الشكل رقم (٢). منحنى يوضح $se_1(z,2)$، $se_3(z,2)$، $se_5(z,2)$

(١٠,٢) التكاملات الأسية واللوغاريتمية والجيبية

تعرف التكاملات الأسية (Exponential Integrals) كالآتي :

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt \quad , \tag{١٠.٤٣}$$

$$E_1(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{e^t}{t} dt \tag{١٠.٤٤}$$

ومن الملحوظ أن

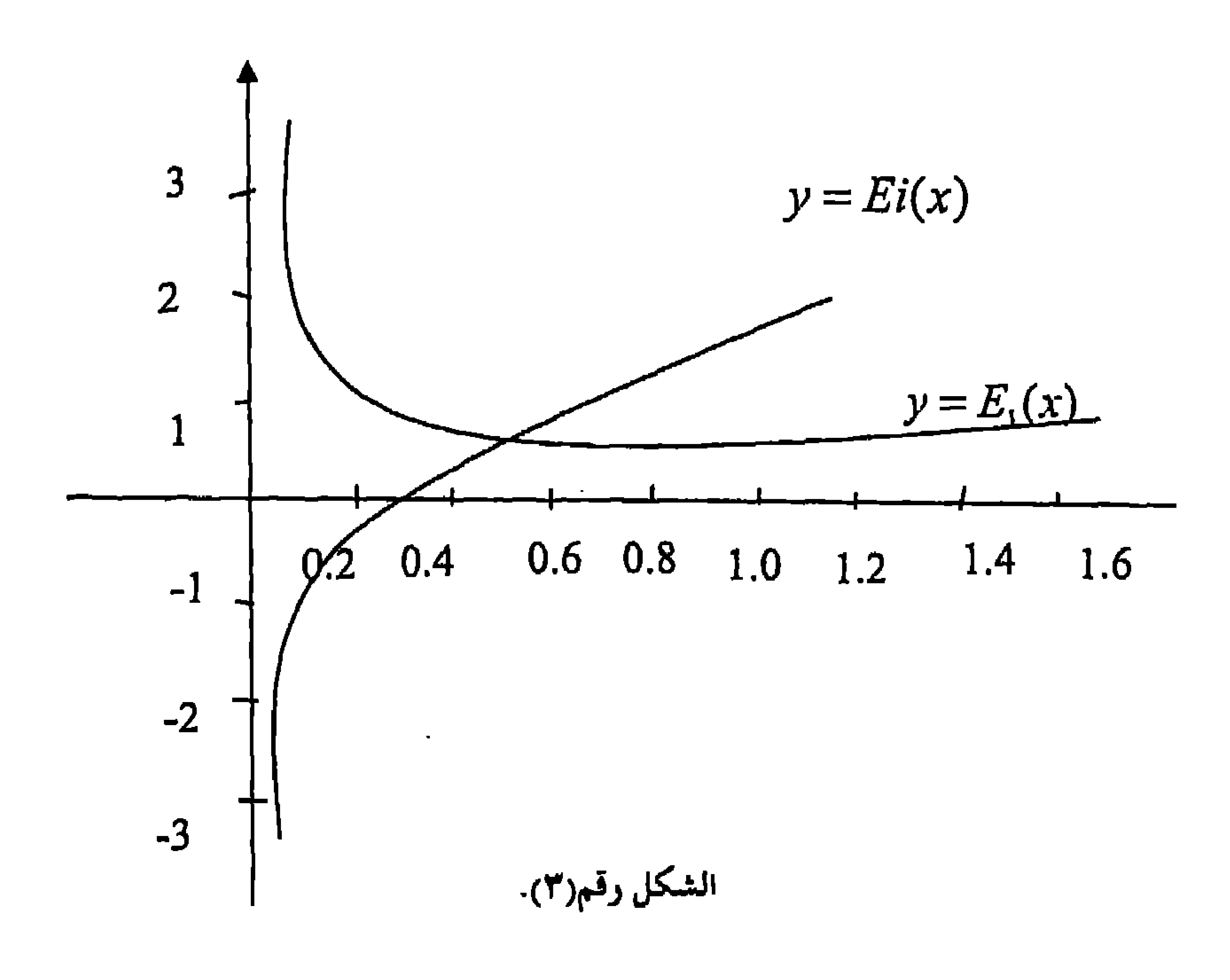
$$E_1(x) = -Ei(-x) \tag{١٠.٤٥}$$

كما يعرف التكامل اللوغاريتمي (Logarithmic integral) كالآتي :

$$l_i(x)=\int_0^x \frac{dt}{\ln t} \qquad (١٠،٤٦)$$

ويمكن إثبات أن

$$l_i(x)=Ei(\ln x)=-E_1(-\ln x) \qquad (١٠،٤٧)$$



الشكل رقم(٣).

ويعرف التكامل الجيبي بالشكل :

$$Si(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \qquad (١٠،٤٨)$$

وعندما $x\to\infty$ ، نجد أن :

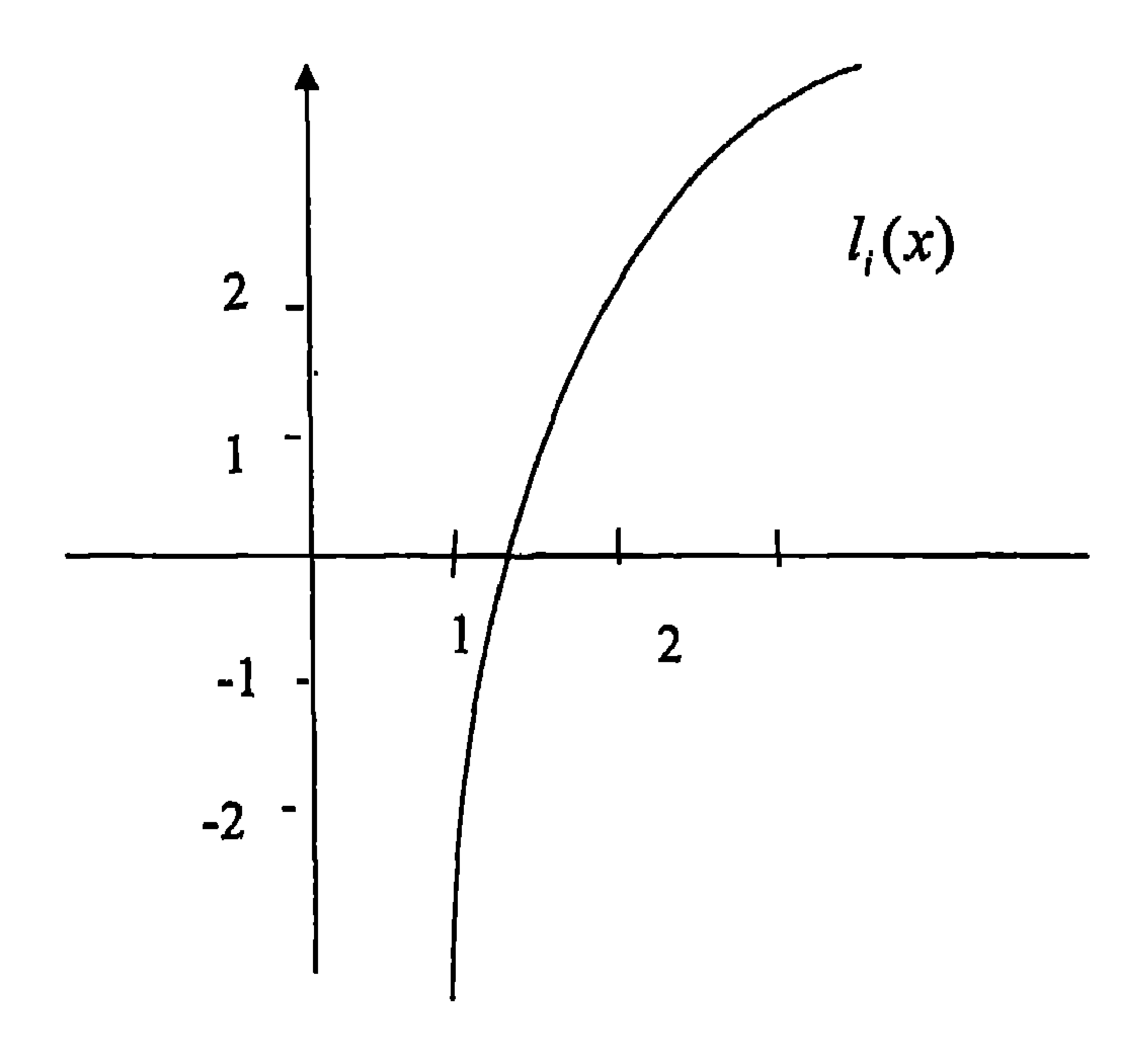
$$Si(\infty)=\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}=\frac{\pi}{2} \qquad (١٠،٤٩)$$

وتعرف الدالة المكملة المتممة (Complementary Function) :

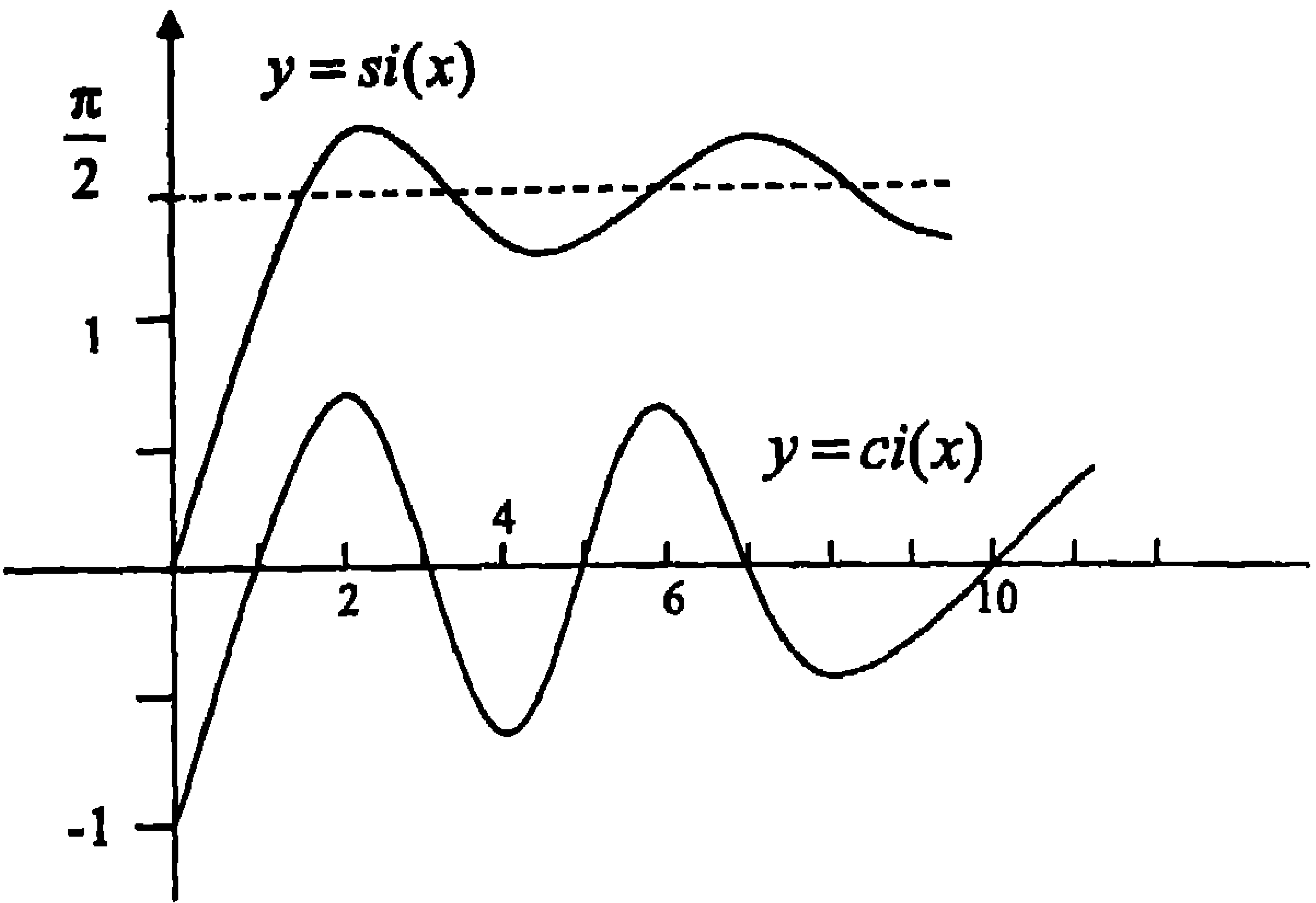
$$si(x)=\frac{\pi}{2}-Si(x)=\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt \qquad (١٠,٥٠)$$

ويعرف التكامل جيبي التمام بالشكل :

$$Ci(x)=\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt\,, \quad x>0 \qquad (١٠,٥١)$$



الشكل رقم (٤). التكامل اللوغاريتمي



الشكل رقم (٥). التكاملات الجيبية وجيبية التمام

ويمكن إثبات ما يلي:

$$Si(x)=\frac{1}{2i}\{Ei(ix)-Ei(-ix)\} \qquad (١٠,٥٢)$$

$$Ci(x)=\frac{1}{2}\{Ei(ix)+Ei(-ix)\} \qquad (١٠,٥٣)$$

$$Ei(\pm ix)=Ci(x)\pm iSi(x) \qquad (١٠,٥٤)$$

(١٠,٣) "دالة الخطأ وتكاملات فرسنل Fresenel Integrals "

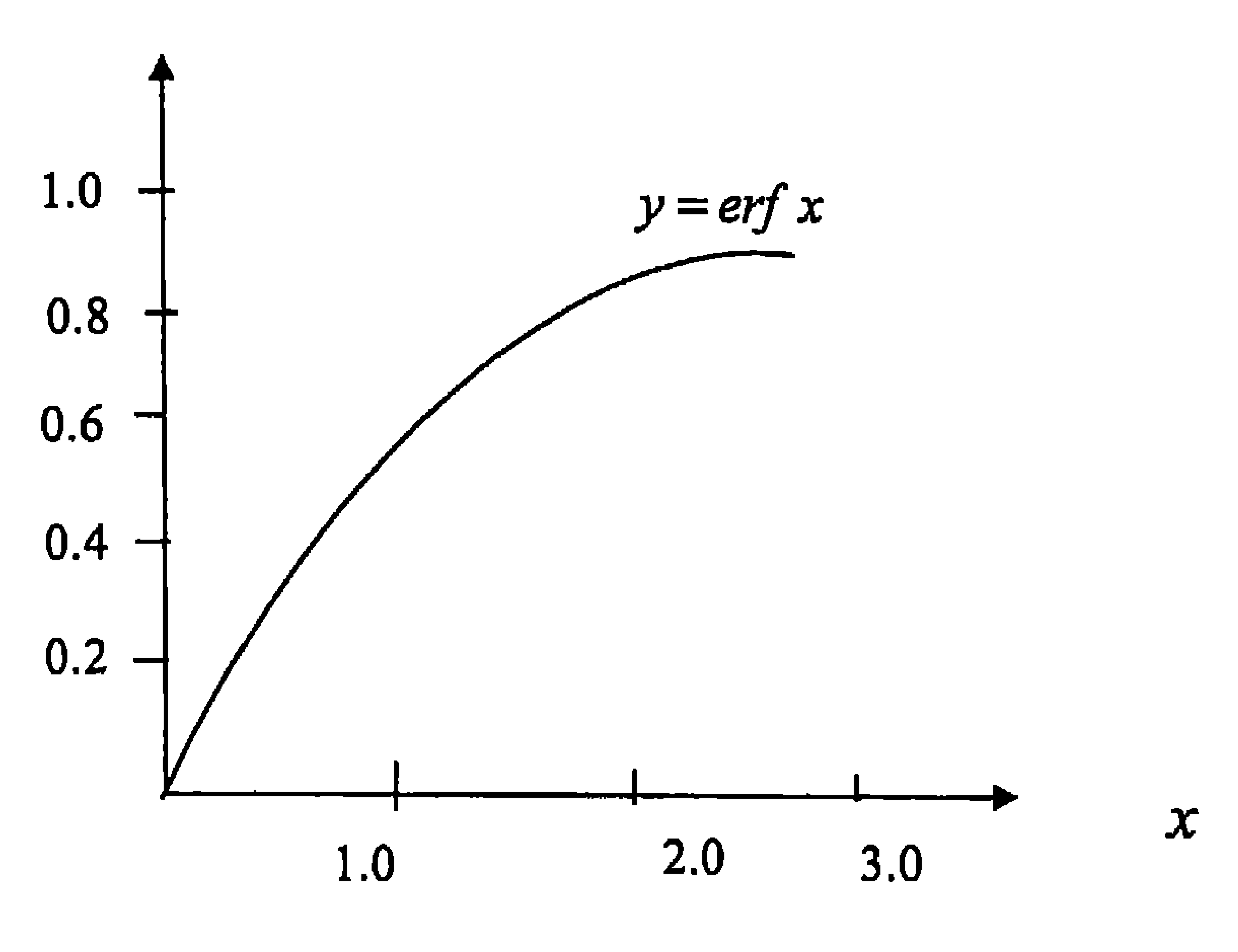
تعرف دالة الخطأ بالآتي:

$$erf\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right) \qquad (١٠,٥٥)$$

ويمثل الشكل رقم(٦) دالة الخطأ.

وتكون دالة الخطأ العامة على الصورة:

$$E_n(x) = \frac{1}{\Gamma\{(n+1)/n\}} \int_0^x e^{-t^n} dt \qquad (١٠،٥٦)$$



الشكل رقم(٦). دالة الخطأ

ومن الواضح أنه $erf\ x = E_2(x)$

أما مكملة دالة الخطأ (The Complementary error Function)

$$erfcf(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2}\ dt \qquad (١٠،٥٧)$$

وتعرف تكاملات فرسنل نسبة إلى الرياضي والفيزيائي الفرنسي أوجستين فرسنل (١٧٨٨- ١٨٢٧) كالآتي :

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt \qquad (١٠،٥٨)$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt \qquad (١٠,٥٩)$$

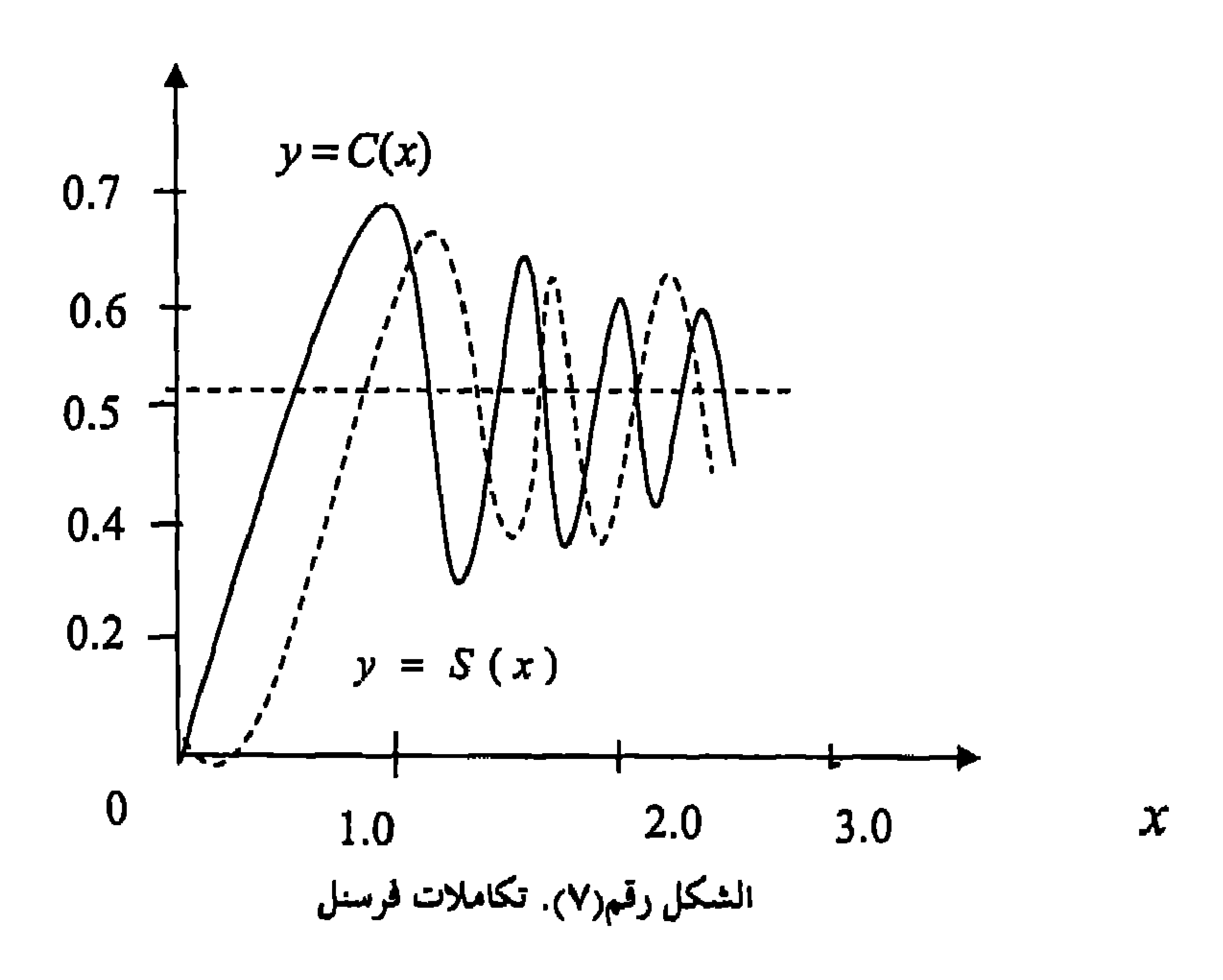
$$S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\ ,\ C(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \qquad (١٠,٦٠)$$

أما الدوال المكملة فهي :

$$C(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C(x) = \int_x^\infty \cos(t^2)\, dt \qquad (١٠,٦١)$$

$$S(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S(x) = \int_x^\infty \sin(t^2)\, dt \qquad (١٠,٦٢)$$

وتستخدم تكاملات فرسنل في دراسة الحيود الضوئي.



الشكل رقم(٧). تكاملات فرسنل

وترتبط تكاملات فرسنل بدالة الخطأ بالعلاقة التالية :

$$C(x) + iS(x) = \frac{1+i}{2} erf\{\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-i)x\} \qquad (١٠,٦٣)$$

(١٠,٤) دالتا ريمان — زيتا وديبي Riemanns Zeta and Debye Function "

عرفت الدالة زيتا من قبل أويلر سنة ١٧٣٧ بالنسبة إلى الأعداد الحقيقية ووسع التعريف من قبل ريمان سنة ١٨٩٥ ليشمل الأعداد المركبة ، ولهذه الدالة تطبيقات كثيرة خاصة في نظرية الأعداد ، إذ استخدمها كل من البلجيكي بواسون (١٨٦٦- ١٩٦٢) والفرنسي هادمارد (١٨٦٥- ١٩٦٣) لإثبات مبرهنة جاوس بالنسبة إلى لأعداد الأولية. وتعرف الدالة زيتا كالآتي :

$$\xi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\,,\qquad x>1 \tag{١٠,٦٤}$$

لاحظ أن

$$\xi(1)=\infty,\quad \xi(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \xi((3)=1.2020569032,\quad \xi(4)=\frac{\pi^2}{90},\quad \xi(6)=\frac{\pi^6}{945}$$

ويمكن أن نثبت أن

$$\xi(x)=\frac{x}{x-1}-x\int_1^{\infty}\frac{\{t\}\,dt}{t^{x+1}}=x\int_1^{\infty}\frac{[t]}{t^{x+1}}dt \tag{١٠,٦٥}$$

حيث $[t]$ صحيح t، $\{t\}=t-[t]$ الجزء الكسري.

ويمكن أن تعرف دالة زيتا كالآتي :

$$\xi(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{e^u-1}du\,,\qquad x>1 \tag{١٠,٦٦}$$

أما دالة ديبي فتعرف كالآتي :

$$D_n(x)=\int_0^{x}\frac{t^n\,dt}{e^t-1} \tag{١٠,٦٧}$$

(١٠,٥) "التكاملات الناقصية Elliptic Integrals "

هي تكاملات على الشكل $\int_0^x f(t,\sqrt{R})\,dt$ حيث R كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو الرابعة في t و f دالة كسرية في $x,\sqrt{R}$ ، درسْت من قبل الفرنسي لجندر (١٧٢٢- ١٨٣٣) وصنفت إلى ثلاثة أصناف، كما درست من قبل النرويجي آبل (١٨٠٢- ١٨٢٩) سنة ١٨٢٦م ، واستخدمت من قبل الفرسي هرميت (١٨٢٢- ١٩٠١) سنة ١٨٥٨ في حل معادلة الدرجة الخامسة بمتغير واحد.

وتعرف التكاملات الناقصية كالآتي:

$$F(k,x)=\int_0^x \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad (0<k<1) \quad (١٠,٦٨)$$

وتسمى التكامل الناقص من النوع الأول:

$$E(k,x)=\int_0^x \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \qquad (0<k<1) \quad (١٠,٦٩)$$

وتسمى التكامل الناقص من النوع الثاني

$$\Pi(k,x,a)=\int_0^x \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta(1+a^2\sin^2\theta)}} \quad (0<k<1, a\neq k) \quad (١٠,٧٠)$$

ويسمى التكامل الناقص من النوع الثالث.

وإذا كانت $x=\pi$ في الصيغ (١٠,٧٠)، (١٠,٩٦)، (١٠,٦٨) فتسمى تلك التكاملات الناقصية التامة.

(١٠,٦) " دالة ديراك Impulse Function ،Dirac Delta Function "

سُميت بهذا الاسم نسبة إلى الفيزيائي الإنجليزي باول ديراك (١٩٠٢- ١٩٨٤)، ولها تطبيقاتها في الميكانيك الكمي. وتعرف بعدة طرق منها.

$$\delta(t-a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t) \qquad (١٠,٧١)$$
، حيث

$$\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon} & t\in[a,a+\varepsilon]\\ 0 & t\notin[a,a+\varepsilon]\end{cases} \qquad (١٠,٧٢)$$

ومن (١٠,٧١) ، (١٠,٧٢) نجد أن :

$$\delta(t-a)=\begin{cases}\infty & t=a\\ 0 & t\neq a\end{cases}$$

كما أن :

$$\int_0^\infty \delta(t-a)\,dt=\int_a^{a+\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}dt=1$$

وقد تعرف دالة ديراك كالآتي :

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikt}dk \qquad (١٠,٧٣)$$

ومنها نجد أن :

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}e^{ikt}dk=\lim_{b\to\infty}\frac{\sin(bt)}{\pi t}$$

وبالتالي فإن :

$$\delta(-t)=\delta(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{ikt}\,dt$$

ومن خواص دالة ديراك ما يأتي :

مبرهنة(١)

إذا كان $a>0$ ، f دالة قابلة للتكامل على $[a,\infty)$ ومتصلة عند النقطة a ، فإن

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(t-a)\,dt=f(a) \qquad (١٠,٧٤)$$

البرهان

بما أن :

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta_\varepsilon(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} f(t) f(a)$$

إذاً باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة للتكامل، يوجد $t_0 \in (a, a+\varepsilon)$ ، بحيث إن

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(t)\,dt = \varepsilon\, f(t_0)$$

وعليه فإن :

$$\int_0^\infty \delta_\varepsilon(t)\, f(t)\,dt = f(t_0)$$

لكـــن $t_0 \in (a, a+\varepsilon)$. إذاً $\varepsilon \to 0 \Rightarrow t_0 \to a$. لكـــن f دالـــة متـــصلة. إذاً $f(t_0) \to f(a)$. وحيث إن $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t-a)$. إذاً

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

ملحوظة: بوضع $a = 0$ في (١٠.٧٤) نجد أن

$$\int_0^\infty f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0)$$

مبرهنة(٢)

$\delta(t) = H'(t)$ ، حيث

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

تمثل دالـة هفيسـايد (Heaviside Unit Function) نـسبة إلى المهنـدس الإنجليـزي أوليفـر هفيسايد (١٨٥٠- ١٩٢٥).

البرهان

$$\int_0^\infty f(t)\,H'(t)\,dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a f(t)\,H'(t)\,dt$$

وبالتكامل بالتجزيء نجد أنه عندما $u=f(t)$ ، $dv=H'(t)dt$ ، فإن $v=H(t)$

و

$$\int_0^\infty f(t)\,H'(t)\,dt = \lim_{a\to\infty}\left(\left[f(t)\,H(t)\right]_0^a - \int_0^a H(t)\,f'(t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(f(a)\,H(a) - f(0)\,H(0) - \int_0^a H(t)\,f'(t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[f(a) - \int_0^a H(t)\,f'(t)\,dt\right]$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[f(a) - f(a) + f(0)\right] = f(0)$$

لكن $f(0)=\int_0^\infty f(t)\,\delta(t)\,dt$. إذاً $H'(t)=\delta(t)$.

مبرهنة(٣)

$\{\delta(t)\}=1$ ، حيث هو محّول لابلاس المعطى بالآتي :

$$F(s)=\ \{f(t)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

البرهان

بما أن :

$$\delta_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varepsilon}\left[H(t-a)-H(t-a-\varepsilon)\right]$$

وبما أن :

$$\{H(t-a)\}=\int_0^\infty e^{-st} H(t-a)\,dt=\int_0^a e^{-st}\cdot 0\,dt+\int_a^\infty e^{-st}\cdot 1\,dt$$

$$= \underset{b\to\infty}{Lim}\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_a^b = \frac{e^{-as}}{s}$$

إذاً

$$\{\delta_\varepsilon(t)\} = \frac{1}{\varepsilon s}\left[e^{-as} - e^{-(a+\varepsilon)s}\right] = e^{-as}\,\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

لكن $\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\,\delta_\varepsilon(t) = \delta(t-a)$. إذاً

$$\{\delta(t-a)\} = e^{-as}\cdot \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\,\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

لكن

$$\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\,\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\,\frac{s\,e^{-\varepsilon s}}{s} = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\,e^{-\varepsilon s} = 1$$

حسب قاعدة لوبتال. إذاً

$$\{\delta(t-a)\} = e^{-as}\cdot 1 = e^{-as}$$

وعندما $a = 0$ ، نجد أن :

$$\{\delta(t)\} = 1$$

وأخيراً المبرهنة التي توضح كيفية إيجاد محوّل (تحويل) فورير لدالة ديراك.

مبرهنة(٤)

$F\{\delta(t)\} = 1$ ، حيث $F\{f(t)\}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-iwt}\,dt$ هو محول فورير.

البرهان

بما أن :

$$\delta(t) = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\,\frac{1}{2\varepsilon}\left[H(t+\varepsilon) - H(t-\varepsilon)\right]$$

إذاً

$$F\{\delta(t)\} = \underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\,\frac{1}{2\varepsilon}\left[F\{H(t+\varepsilon) - H(t-\varepsilon)\}\right]$$

لكن

$$H(t+\varepsilon)-H(t-\varepsilon)=\begin{cases}1 & t\in[-\varepsilon,\varepsilon)\\ 0 & t\notin[-\varepsilon,\varepsilon)\end{cases}$$

إذاً

$$F\{H(t+\varepsilon)-H(t-\varepsilon)\}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}e^{-iwt}dt=\left[\frac{-e^{iwt}}{iw}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}=\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{iw}=2\cdot\frac{\sin(\varepsilon w)}{w}$$

وعليه فإن :

$$F\{\delta(t)\}=\underset{\varepsilon\to 0}{Lim}\frac{\sin(\varepsilon w)}{\varepsilon w}=1$$

(١٠,٧) الدوال التوافقية الكروية Spherical Harmonic Functions

هي دوال أو كثيرات حدود من الدرجة n متجانسة في x, y, z تمثل حلاً لمعادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (١٠,١)$$

والتي يعبر عنها بالإحداثيات الكروية (r,θ,ϕ) ، حيث $x=r\sin\theta\cos\phi$ ، $y=r\sin\theta\sin\phi$ ، $z=r\cos\theta$ كالآتي:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0 \qquad (١٠,٢)$$

ظهرت سنة ١٧٨٥م عند كل من لجندر ولابلاس ، وسُميت بهذا الاسم من قبل لابلاس، وتكلمّ عنها جاوس سنة ١٨٢٨م وتومسن وتايت وكوجل. لها تطبيقاتها في المعادلات التفاضلية الناقصية (Elliptic Differential Equations) وخاصة في حل مسألة ديركلي المتعلقة بحساب الجهد داخل كرة وخارجها.

مثال(١)

أثبت أن $V(x,y,z)=(z+ix\cos w+iy\sin w)^n$ دالة توافقية كروية من الدرجة n.

الإثبات

بما أن :

$$\frac{\partial V}{\partial x}=n(z+ix\cos w+iy\sin w)^{n-1}\cdot i\cos w$$

إذاً

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=n(n-1)(z+ix\cos w+iy\sin w)^{n-2}\cdot i^2\cos^2 w$$

$$=-n(n-1)(z+ix\cos w+iy\sin w)^{n-2}\cos^2 w$$

وبالمثل نجد أن :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-n(n-1)(z+ix\cos w+iy\sin w)^{n-2}\cdot\sin^2 w$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=n(n-1)(z+ix\cos w+iy\sin w)^{n-2}$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

وعليه فإن $V(x,y,z)$ تحقق معادلة لابلاس. لكن

$$V(tx,ty,tz)=t^n V(x,y,z)$$

إذاً $V(x,y,z)$ دالة متجانسة من الدرجة n ، وعليه فإن $V(x,y,z)$ دالة توافقية كروية من الدرجة n.

مثال(٢)

أثبت أن $V(r,\theta,\phi) = r^2(1-3\cos^2\theta)$ دالة توافقية كروية.

الإثبات بما أن :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2r(1-3\cos^2\theta)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 2(1-3\cos^2\theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = r^2 \cdot 6\sin\theta\cos\theta = 3r^2\sin 2\theta)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 6r^2\cos 2\theta\,, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

إذاً

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}V + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$= 2(1-3\cos^2\theta) + 4(1-3\cos^2\theta) + 6\cos 2\theta + 3\cot\theta\cdot\sin 2\theta$$

$$= 6 - 18\cos^2\theta + 6(2\cos^2\theta - 1) + 6\cos^2\theta$$

$$= 6 - 18\cos^2\theta + 12\cos^2\theta - 6 + 6\cos^2\theta = 0$$

وعليه فإن $V(r,\theta,\phi)$ تحقق معادلة لابلاس وبالتالي فإنها دالة توافقية كروية.

وفي ما يلي المبرهنة الآتية :

مبرهنة(١) "Kelvin's Theorem"

إذا كانت V_n دالة كروية توافقية من الدرجة n، فإن $\frac{V_n}{r^{2n+1}}$ دالة كروية توافقية من الدرجة $-(n+1)$.

البرهان

لتكن $V = r^m V_n$. إذا كانت V دالة كروية توافقية، فإنها تحقق معادلة لابلاس.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \qquad (❖)\ldots$$

لكن $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ، $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$ ، $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$ ، $\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=r^m\frac{\partial V_n}{\partial x}+r^{m-1}\frac{\partial r}{\partial x}V_n=r^m\frac{\partial V_n}{\partial x}+m\,xr^{m-2}V_n$$

إذاً

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+m\,r^{m-1}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial V_n}{\partial x}+m\,xr^{m-2}\frac{\partial V_n}{\partial x}$$

$$+m(m-2)xr^{m-3}\frac{\partial r}{\partial x}V_n+m\,r^{m-2}V_n$$

$$=r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+2m\,x\,r^{m-2}\frac{\partial V_n}{\partial x}+m(m-2)x^2r^{m-4}V_n+m\,r^{m-2}V_n$$

وبالمثل نجد أن :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}+2m\,yr^{m-2}+m(m-2)y^2r^{m-4}V_n+m\,r^{m-2}V_n$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}+2m\,zr^{m-2}+m(m-2)z^2r^{m-4}V_n+m\,r^{m-2}V_n$$

وبالتعويض في (❖) نجد أن :

$$r^m\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)+2m\,r^{m-2}\left(x\frac{\partial V_n}{\partial x}+y\frac{\partial V_n}{\partial y}+z\frac{\partial V_n}{\partial z}\right)$$

$$+m(m-2)\,r^{m-4}(x^2+y^2+z^2)V_n+3m\,r^{m-2}\cdot V_n=0$$

وحيث إن V_n دالة كروية توافقية من الدرجة n . إذاً V_n تحقق معادلة لابلاس كما أنها دالة متجانسة من الدرجة n ، وعليه فإن :

$$x\frac{\partial V_n}{\partial x}+y\frac{\partial V_n}{\partial y}+z\frac{\partial V_n}{\partial z}=nV_n \text{ ، } \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}=0$$

وبالتالي فإن :

$$2mr^{m-2}\cdot nV_n+m(m-2)r^{m-4}\cdot r^2V_n+3mr^{m-2}V_n=0$$

وعليه فإن :

$$m(2n+m-2+3)r^{m-2}V_n=0$$

ومنها نجد أن $m=0$ أو $m+2n+1=0$ وعليه $m=0$ أو $m=-(2n+1)$

وبالتالي فإن $V=r^{-(2n+1)}\cdot V_n$ دالة كروية توافقية من الدرجة $-(n+1)$.

وقبل أن نوضح طبيعة الدوال التوافقية الكروية وعددها نلحظ أن كثيرة حدود لجندر $p_n(t)$ هي أهم وأبسط أنواع كثيرات الحدود التوافقية الكروية ، ويتضح ذلك من اشتقاق معادلة لجندر من معادلة لابلاس بالإحداثيات الكروية كالآتي :

لتكن $V=r^nV_n$ ، حيث $V_n=f(\theta,\phi)$. إذاً

$$\frac{\partial V}{\partial r}=nr^{n-1}V_n\,,\quad \frac{\partial V}{\partial\theta}=r^n\frac{\partial V_n}{\partial\theta}\,,\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=r^n\frac{\partial^2 V_n}{\partial\phi^2}$$

لكن معادلة لابلاس بالإحداثيات الكروية هي :

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial V}{\partial r})+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0$$

إذاً

$$\frac{\partial}{\partial r}(nr^{n+1}V_n)+\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(r^2\sin\theta\frac{\partial V_n}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}r^n\frac{\partial^2 V_n}{\partial\phi^2}=0$$

ومنها نجد أن :

$$n(n+1)r^nV_n+\frac{r^n}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_n}{\partial\theta})+\frac{r^n}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_n}{\partial\phi^2}=0$$

وإذا فرضنا أن V_n مستقلة عن ϕ ، نجد أن :

$$n(n+1)V_n+\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_n}{\partial\theta})\right)=0 \qquad (\clubsuit)$$

والآن لنفرض أن $t=\cos\theta$ ، $V_n=y$ إذاً

$$\frac{\partial V_n}{\partial\theta}=\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\partial y}{\partial t}$$

وبالتعويض في (❖) نحصل على :

$$n(n+1)y+\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(-\sin\theta\frac{\partial y}{\partial t})=0$$

ومنها نصل إلى $\frac{\partial}{\partial t}\{(1-t^2)\frac{\partial y}{\partial t}\}+n(n+1)y=0$ وهي معادلة لجندر.

ملاحظة: (أ) توجد ثلاث دوال متجانسة من الدرجة الأولى مستقلة تحقق معادلة لابلاس في الفضاء الثلاثي البعد ، وهي :

$$f_1(x,y,z)=x\ ,\quad f_2(x,y,z)=y\ ,\quad f_3(x,y,z)=z$$

(ب) توجد خمس دوال متجانسة من الدرجة الثانية مستقلة تحقق معادلة لابلاس في الفضاء الثلاثي البعد ، وهي :

$$x^2-y^2\ ,\quad y^2-z^2\ ,\quad xy,\quad xz,\quad yz$$

وبصورة عامة يوجد $(2n+1)$ من الدوال المتجانسة من الدرجة n تحقق معادلة لابلاس في الفضاء الثلاثي البعد.

وحيث إنه يمكن التعبير عن $(z+ix\cos w+iy\sin w)^n$ ككثيرة حدود مثلثية. إذاً

$$(z+ix\cos w+iy\sin w)^n=\frac{1}{2}(a_0(x,y,z)$$
$$+\sum_{m=1}^{n}\left[a_m(x,y,z)\cos mw+b_m(x,y,z)\sin mw\right]$$

لكن w مستقلة عن x,y,z. إذاً b_m , a_m كثيرات حدود متجانسة تحقق معادلة لابلاس (١٠،١). لكن أعلى قوة للمتغير z في $a_m(x,y,z)$ هي z^{n-m} و $a_m(x,y,z)$ دالة زوجية في y بينما أعلى قوة للمتغير z في $b_m(x,y,z)$ هي z^{n-m} و $b_m(x,y,z)$ دالة فردية في y. إذاً a_m, b_m مستقلة خطياً وعددها $(2n+1)$ وكل منها كثيرة حدود توافقية.

لاحظ أنه يمكن التعبير عن a_m, b_m كالآتي :

$$a_m(x,y,z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos w+iy\sin w)^n\cos mw\,dw \quad (١٠،٣)$$

$$b_m(x,y,z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos w+iy\sin w)^n\sin mw\,dw \quad (١٠،٤)$$

إذاً كل كثيرة حدود توافقية من الدرجة n تكون على الشكل

$$\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos w+iy\sin w)^n f(w)\,dw$$

حيث $f(w)$ كثيرة حدود مثلثية.

أما في الإحداثيات الكروية (r,θ,ϕ)

$$x=r\sin\theta\cos\phi\ ,\quad y=r\sin\theta\sin\phi\ ,\quad z=r\cos\theta$$

فإن

$$a_m(x,y,z)=\frac{r^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\theta+i\sin\theta\cos(w-\phi)\right]^n\cos mw\,dw \quad (١٠،٥)$$

$$m=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

$$b_m(x,y,z)=\frac{r^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(w-\phi)]^n \sin mw\,dw \quad (١٠،٦)$$

$$m=1,\ 2,\ ...,\ n$$

لكن

$$(\cos\theta+i\sin\theta\cos t)^n$$

$$=p_n(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^{n} i^{-m}\frac{n!}{(n+m)!}p_n^m(\cos\theta)\cos mt \quad (١٠،٧)$$

حيث $p_n(\mu)$ كثير حدود لجندر و $p_n^m(\mu)$ كثيرة حدود لجندر المصاحبة (Associated Legendre Polynomial) والمعرفة كالآتي :

$$p_n^m(\mu)=(-1)^m(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d\,p_n(\mu)}{d\mu^m},\quad -1<\mu<1 \quad (١٠،٨)$$

إذاً

$$a_0(x,y,z)=2r^n\,p_n(\cos\theta) \quad (١٠،٩)$$

$$a_m(x,y,z)=2r^{n_i-m}\frac{n!}{(n+m)!}p_n^m(\cos\theta)\cos m\phi \quad (١٠،١٠)$$

$$b_m(x,y,z)=2r^{n_i-m}\cdot\frac{n!}{(n+m)!}p_n^m(\cos\theta)\sin m\phi \quad (١٠،١١)$$

وعليه فإن كل كثيرة حدود توافقية كروية من الدرجة n تكون على الشكل $r^n S(\theta,\phi)$ ، حيث :

$$S(\theta,\phi)=A_0\,p_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}A_m\cos m\phi+B_m\sin m\phi)\,p_n^m(\cos\theta),$$

A_m, B_m ثوابت لكل $m=1,...,n$ هو السطح التوافقي الكروي (Spherical Harmonic Surface) من الدرجة n.

ملحوظة: أحد الحلول المهمة لمعادلة لابلاس هو الحل المتناظر حول أحد المحاور، وليكن المحور z وهو حل تحليلي (Analytic Solution) بجوار نقطة الأصل يمكن التعبير

عنه بالشكل $\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x,y,z)$ حيث V_n كثيرة حدود توافقية كروية من الدرجة n مستقلة عن ϕ وبالتالي فإنه على الشكل:

$$\mu = \cos\theta, \quad V(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, a^n\, p_n(\mu) \qquad (١٠.١٢)$$

وإذا كانت $f(\mu)$ تمثل حلاً لمعادلة لابلاس على كرة معادلتها بالإحداثيات الكروية هي $r = a$ ، فإن ([9],P211) ،

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, a^n\, p_n(\mu) \qquad (١٠.١٣)$$

وباستخدام خاصية تعامد كثيرات حدود لجندر نجد أن

$$\frac{2A_n a^n}{2n+1} = \int_{-1}^{1} f(\mu)\, p_n(\mu)\, d\mu \qquad (١٠.١٤)$$

وعليه فإن الحل العام لتلك المسألة هو

$$V(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{r^n}{a^n}\, p_n(\mu) \int_{-1}^{1} f(t)\, p_n(t)\, dt \qquad (١٠.١٥)$$

وتكون المشكلة إذا كانت تلك المتسلسلة متقاربة لكل $r < a$ ، وإذا كان المجموع يقترب من $f(\mu)$ عندما $r \to a$.

ونختم ببعض تطبيقات الدوال الكروية التوافقية ومسألة دركلي (Dirichlet Problem) بالنسبة إلى الكرة والتي تتلخص بإيجاد الجهد (Potential) داخل وخارج كرة عُلِمَ الجهد على سطحها.

فإذا كانت المسألة هي حساب الجهد داخل كرة نصف قطرها وحدة وحدة عُلِمَ الجهد على سطحها، تصبح المسألة كيفية إيجاد دالة توافقية $V = V(r,\theta)$ ،

حيث $r < a$ ومتصلة على $r \leq a$ تحقق الشروط الحدية $V\big|_{r=a} = f(\theta)$ حيث $f(\theta)$ دالة متصلة في الفترة $[0,\pi]$.

لاحظ أن مسألة ديركلي هي إيجاد حل للمسألة الحدية

$$2r\frac{\partial V}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}+\cot\theta\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0,\quad 0<r<1 \quad (١٠،١٦)$$

$$V(1,\theta,\phi)=f(\theta)\,,\quad 0\leq\theta\leq\pi \quad (١٠،١٧)$$

وبفصل المتغيرات نجد أننا نبحث على حلول على الشكل $V(r,\theta) = R(r)S(\theta)$

وبالتفاضل والتعويض في (10.16) نجد أن

$$r^2 R'' + 2r R' - n(n+1)R = 0 \quad (١٠،١٨)$$

وهي معادلة أويلر

$$\left[\sin\theta S'(\theta)\right]' + n(n+1)\sin\theta = 0 \quad (١٠،١٩)$$

وهذه المعادلة هي معادلة لجندر.

ولحل معادلة أويلر نستخدم التعويض $R(r) = r^{\alpha}$ ، فنجد أن $\alpha = \begin{cases} n \\ -n(n+1) \end{cases}$

$$R(r) = ar^n + br^{-(n+1)}$$

ولكي يكون الحل محدوداً عند مركز الكرة يجب أن تكون $b = 0$ ، وبالتالي فإن

$$R(r)=ar^n\,,\ n=0,1,2,...$$

أما الحل العام لمعادلة لجندر فهو

$$S(\theta) = AP_{\nu}(\cos\theta) + BQ_{\nu}(\cos\theta)$$

حيث $P_{\nu}(x)$ ، $Q_{\nu}(x)$ دالتا لجندر من النوع الأول والثاني $\operatorname{Re}\nu \geq -\frac{1}{2}$. لكن $\left|\cos\theta\right| \leq 1$ ، وعندما $x \to 1$ نجد أن $Q_{\nu}(x) \to \infty$ بينما $p_{\nu}(x)$ محدودة. إذاً يجب أن تكون $B = 0$ لكي يكون الحل محدوداً داخل الكرة.

وإذا كانت $\nu \in Z^-$ فإن $p_\nu(x) \to \infty$ عندما $x \to -1$ ، إذاً يجب أن تكون $\nu = n$ ، $n = 0,1,\ldots$. إذاً الحل الوحيد لمعادلة لجندر هو:

$$S(\theta) = A\, p_n(\cos\theta), \qquad n = 0,1,\ldots \tag{١٠,٢٠}$$

وعليه فإن حل معادلة لابلاس داخل الكرة هو

$$V_n = M_n\, r^n\, p_n(\cos\theta), \qquad n = 0,1,\ldots \tag{١٠,٢١}$$

ويمكن حل مسألة ديركلي الحدية بالتعبير عن $f(\theta)$ كمتسلسلة لكثيرات حدود لجندر، وهذا يعني أن

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, p_n(\cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le \pi \tag{١٠,٢٢}$$

حيث

$$f_n = (n + \tfrac{1}{2}) \int_0^{\theta} f(\theta) p_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta \tag{١٠٢٣}$$

وإذا فرضنا أن تلك المتسلسلة متقاربة بانتظام في $[0,\pi]$ وفرضنا أن $M_n = f_n\, a^{-n}$ ، نجد أن

$$V_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^n p_n(\cos\theta) \tag{١٠,٢٤}$$

$$V\Big|_{r=a} = f(\theta)$$

وهذا يعني أن (١٠,٢٤) تمثل حلاً لمسألة ديركلي داخل كرة نصف قطرها وحدة واحدة.

أما إذا كانت $f = f(\theta,\phi)$ ، فإن الحل العام لمسألة ديركلي هو

$$V = V_{mn} = \left[a_{mn}\cos(m\phi) + b_{mn}\sin(m\phi)\right] \cdot r^n\, p_n^m(\cos\theta)$$

$$m = 0,1,2,\ldots \quad , \quad n = m, m+1, \ldots\ldots$$

تمـــــارين

١- أثبت صحة الآتي:

(أ) $\int_0^\infty \cos x Ci(x)dx = \int_0^\infty \sin x si(x)dx = -\frac{\pi}{4}$

(ب) $\int_0^\infty \{Ci(x)\}^2 dx = \int_0^\infty \{si(x)\}^2 dx = \frac{\pi}{2}$

٢- إذا كان $I(\alpha) = \int_0^\infty (1-e^{-\alpha t})\frac{\cos t}{t}dt$ ، فأثبت أن

$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ ، واستنتج أن $I(\alpha) = \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)$

٣- أثبت أن:

(أ) $erf(-x) = -erf\, x$ ، (ب) $|erf(x)| \le 1$

٤- أثبت أنه إذا كان $T(x,t) = Cerf\{x/\sqrt{4kt}\}$ ، فأثبت أن

(أ) $T(0,t) = 0$ ، (ب) $T(x,0) = C$ ، (ج) $\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

٥- أثبت أن:

(أ) $\int_0^x C(t)dt = xC(x) - \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x^2$

(ب) $\int_0^x S(t)dt = xS(x) + \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x^2 - \frac{1}{\pi}$

(ج) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}} = \sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

٦- باستخدام التعويض $x = 2\sin\theta$ أثبت أن:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}} = \frac{1}{3}F\left(\frac{2}{3}\right)$$

٧- أثبت أن:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

المراجع

A. M. Mathai & H. J. Haubold, special Functions for Applied scientists, springer (2008).
B. G. Korenev. Bessel Function and their Applications, Taylor & Francis, London (2002).
C. R. Wylie, Advanced Engineering Mathematics' Mc Graw Hill(1975).
C. T. Copson, Partial Differential Equations, Cambridge University Press (1975).
D. V. Q' Neil, Advanced Engineering Mathematics 4th Edition'Braks cole publishing company (1995).
E. D. Rainville, "Special Functions" Mamillan (1960).
E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics 7th Edition Joh Wiley (1993).
F. Brauer and J. A. Nohel, Ordinary Differential Equations A First Course, W. A. Benjamin, London (1973).
G. Andrews, A. Richard, R. Ranjan. Special functions. Encyclopedia of Mathemafics and its Applications, 71. Cambridge university Press 1999.
G. F. Simmons, Differential Equations with Applications and historical notes Mc Graw-Hill (1984).
G. N. Watson, Bessel Functions Cambridge University Press (1944).
H. Bateman, Partial Differential Equations of Mathematical Physics Cambridge university Press (1969).
L. C. Andrews. Special Function of Mathematics for engineers. 2ndnndjjnnnd edition McGraw Hill, Inc.
M. A. Chaudhry, S. M. Zubair. On a class of in complete gamma function with application. Chapman and Hall / CRC, Boca (2002).
N. N. Lebedev "Special Functions And Their Applications" Revised English Edition Translated and Edited by Richard. A. Silverman Prentic-Hall, INC. London, (1965)
R. Dennemeyer, Introduction to partial Differential Equations and Boundary Value problems, New York (1988).
R. V. Churchil, Operational Mathematics, Mc Grow Hill (1972).

S. J. Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, John Wiley (1992).

S. Kanemitsu & H. Tuskada, vistas of special functions, world scientific publishing Co. (2007).

W. E. Boyce and R. C. Diprima "Elementary Differential Equations "3rd Edition(1977) John Wiley.

W.W. Bell, Special Functions for Scientists and Engineers London (1968) .

Z. X. Wang & D. R. Guo, special Functions, Translated by D. R. Guo X. J. Xia world scientific (1980).

ثبت المصطلحات
Index

أ

ت

د

Gamma Function	دالة جاما
Incomplete Gamma Function	دالة جاما غير المكتملة
Bessel Function	دالة بسل
Modefied Bessel's Function	دالة بسل المعدلة
Weber-Hermit Function	دالة وير–هرميت
Ber Function	دالة بير
Fresenel's Integrals	وتكاملات فرسنل
Dirac Delta Function	دالة ديراك
Beta Function	دالة بيتا
Incomplete Beta Function	دالة بيتا غير المكتملة
Generalized Bessel's Function	دالة بسل المعممة
Kelvin's Functions	دوال كلفن
Bei's Function	دالة بيا
Mathieu's Function	دالة ماثيو
Modefied Mathieu Function	دالة ماثيو المعدلة
Heaviside Unit Function	دالة هفيسايد
Riemann and Debye's Functions	دالتا ريمان وديبي

ر

رمز بوشمر	Pochammer Symbol

ع

علاقة رودريجس	Rodrigues Relation
علاقة تكرارية	Recurrence Relation

ط

طريقة فروبينص	Frobenius Method

ك

كثيرات حدود لجندر	Legendre Polynomials
كثيرات حدود هرميت	Hermit Polynomials
كثيرات حدود جيجنباور	Gegenbauer Polynomials
كثيرات الحدود فوق الكروية	Ultraspherical Polynomials
كثيرات حدود شبيشف	Chebyshev Polynomials
كثيرات حدود لاجير	Laguerre Polynomials
كثيرات حدود جاكوبي	Jacobi Polynomials

م

متسلسلات القوى	Power series
متقاربة تقارباً مطلقاً	Absolutely Convergent
مسائل القيم أو الشروط الابتدائية	Initial Value Problems
معادلة هرميت	Hermit Equation
متقاربة أو تقاربية	Convergent
متباعد	Divergent
معادلة لجندر	Legendre Equation
متسلسلة فورير- بسل	Fourier-Bessel series
مكملة دالة الخطأ	The Complementary error Function

ن

نصف قطر التقارب	Radius of Convergent
نقطة شاذة	Singular Point
نقطة غير منتظمة	Irregular Point
نقطة عادية	Ordinary Point
نقطة تحليلية	Analytic Point
نقطة شاذة منتظمة	Regular Singular Point

كشاف الموضوعات

هذا الكتاب :

يوضح للقارئ ماهية وخواص وبعض تطبيقات كل من دالتي بيتا وجاما . كثيرات الحدود ودوال لجندر وشبشف . دوال بسل . معادلة وكثيرات حدود هرميت ولاجير . الدوال فوق الهندسية وعلاقة الدوال الأخرى بها . كثيرات حدود جيجنباور وجاكوبي . معادلة ماثيو . دالتي ريمان وديبي . التكاملات الناقصية ودالة ديراك . والدوال التوافقية الكروية .

Special Functions
with
Some Applications


Bibliotheca Alexandrina
12237226

ردمك: ٠-٠٢٥٨-٠٠-٦٠٣-٩٧٨
ISBN: 978-603-00-0258-0